

# IL FILTRO DI WIENER PER LA DETERMINAZIONE DELLA SUPERFICIE DINAMICA MEDIA DEGLI OCEANI

M. Gilardoni, L. Rossi, M. Reguzzoni, A. Albertella  
Politecnico di Milano – DICA (Sez. Geodesia e Geomatica)  
Piazza Leonardo da Vinci 32, MILANO  
maddalena.gilardoni@polimi.it

## Riassunto

Una superficie dinamica media degli oceani (Mean Dynamic Ocean Topography) globale è stata calcolata usando esclusivamente dati da satellite: il geoide è ottenuto da un modello di gravità basato sui dati del satellite GOCE, mentre la superficie media del mare (Mean Sea Surface) è ottenuta usando solo misure altimetriche. Poiché il modello di gravità considerato (TIMR5) è disponibile fino a grado e ordine 280, la corrispondente MDT deve essere filtrata consistentemente. In particolare la MDT viene rappresentata in serie di armoniche sferiche e successivamente filtrata applicando il principio di minimizzazione di Wiener. La rappresentazione in armoniche sferiche richiede di avere valori su tutta la superficie terrestre e non soltanto sulla superficie degli oceani, è quindi necessario coprire la superficie dei continenti con valori fittizi. Per questo scopo è stata adottata una procedura di riempimento tale da garantire che il segnale globale abbia la stessa covarianza del segnale solo sugli oceani. Infine, propagando l'errore del geoide e della MSS, sono state calcolate le matrici di varianza-covarianza della MDT stessa e delle velocità geostrofiche da questa derivate.

## 1. Introduzione

La superficie oceanica dinamica media (MDT) è la piccola (~ 2 metri) deviazione tra la superficie topografica media del mare (MSS) e la superficie del mare a riposo, cioè il geoide [Bingham et al., 2008]. Uno dei più recenti modelli di geoide, TIMR5, calcolato seguendo l'approccio time-wise [Pail et al., 2010] e usando tutti i dati della missione GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer), e una superficie altimetrica del mare ad alta risoluzione, CNES\_CLS11 [Schaeffer et al., 2012], permettono di calcolare la MDT con una precisione di pochi centimetri, [ESA, 1999, Rummel et al., 2010].

La superficie dinamica media del mare è di fondamentale importanza per la ricerca in oceanografia e meteorologia, proprio perché da essa si può derivare la componente geostrofica delle correnti oceaniche superficiali. Studi recenti, [Knudsen et al., 2011, Bingham et al., 2011] mostrano che le misure GOCE forniscono un notevole miglioramento nella determinazione della MDT e delle relative correnti geostrofiche fino a raggiungere pochi cm/s di accuratezza. Di seguito, nel paragrafo 2, è illustrato il calcolo di una MDT globale tale che sia possibile una sua rappresentazione in serie di armoniche sferiche. La MDT viene filtrata usando un filtro di Wiener, come descritto nel paragrafo 3. Il paragrafo 4 contiene la discussione relativa alla propagazione dell'errore alla MDT e alle correnti geostrofiche. Le conclusioni sono nel paragrafo 5.

## 2. Calcolo della MDT

La MDT è la deviazione della superficie media del mare dal geoide, che è solitamente rappresentato in serie di armoniche sferiche:

$$N(P) = R \sum_{n=2}^L \sum_{m=0}^n T_{nm} Y_{nm}(P)$$

dove  $T_{nm}$  sono i coefficienti armonici;  $Y_{nm}$  sono le armoniche sferiche di grado  $n$  e ordine  $m$ ;  $L$  è il massimo grado dello sviluppo in serie;  $R$  è il raggio medio terrestre.

Per tutti i gradi e ordini minori o uguali a  $L$ , i coefficienti del geoide e le loro varianze (errore di commissione) sono disponibili. Il segnale corrispondente ai gradi maggiori di  $L$  è il segnale omesso (errore di omissione). Il grado  $L$  corrisponde approssimativamente ad una scala spaziale pari a  $20000/L$  km e, quindi, anche un geoide grigliato densamente non contiene dettagli spaziali inferiori a questa scala.

La MSS rappresenta il livello del mare su un'area, per definizione, limitata. I dati originari, da cui la MSS è derivata, sono le misure lungo le tracce dei satelliti altimetrici; questo implica che ogni misura abbia un'alta risoluzione spettrale.

L'idea è di rappresentare sia il geoide che la MSS, e quindi la MDT, in serie di armoniche sferiche. La rappresentazione in armoniche sferiche richiede di avere un segnale regolarmente distribuito su tutta la superficie terrestre, mentre la MDT è naturalmente definita solo sulla superficie degli oceani. La distorsione lungo la zona di transizione tra mare e terra non può essere eliminata completamente, ma può essere fortemente ridotta scegliendo un riempimento appropriato e lisciando la transizione il più possibile.

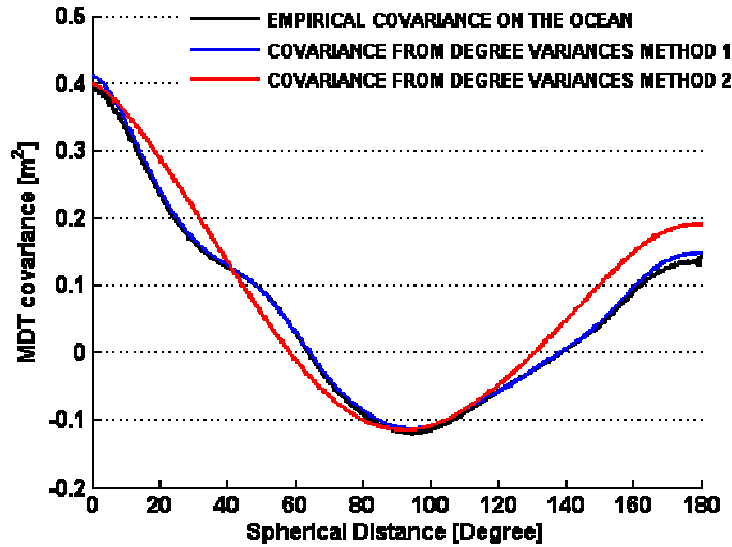
Il problema è già stato affrontato in letteratura proponendo per esempio un riempimento eseguito con un operatore di media mobile, [Albertella et al., 2008, Albertella et al., 2012]. In questo lavoro si propone un approccio alternativo, volendo completare la MDT con un segnale che sia coerente, in termini di variabilità stocastica, con il segnale sugli oceani.

Per prima cosa si è calcolata la funzione di covarianza empirica della MDT definita solo sugli oceani, sotto l'ipotesi di campo omogeneo e isotropo. In seguito questa funzione di covarianza è interpolata con una funzione modello definita positiva e basata sulle "degree variances"  $\sigma_n^2$ :

$$C(\psi) = R^2 \sum_{n=0}^N \sigma_n^2 P_n(\cos[\psi])$$

dove  $P_n$  sono i polinomi di Legendre e  $\psi$  è la distanza sferica. Quindi i continenti sono riempiti con dati fittizi, tali che i coefficienti armonici ricavati dall'insieme completo dei dati (oceani e continenti) abbiano "degree variances" empiriche uguali o almeno molto simili a quelle del modello di covarianza solo sugli oceani, [Gilardoni et al., 2015].

Il confronto tra la MDT ottenuta con questo procedimento (metodo 1) e un'analogha MDT ottenuta con un semplice algoritmo di media mobile (metodo 2), [Albertella et al., 2014], mostra che con il primo metodo si hanno delle "degree variances" molto simili a quelle che descrivono la covarianza empirica sugli oceani come illustrato in Fig.1.



**Fig. 1:** Confronto tra le funzioni di covarianza del segnale sugli oceani (linea nera) con la covarianza di una MDT globale completata sugli oceani con una media mobile (linea blu) e con la covarianza di una MDT globale completata stocasticamente (linea rossa).

### 3. Filtraggio

Nella costruzione di un geode il suo spettro è troncato ad un certo grado massimo  $L$ , mentre la MSS per definizione ha uno spettro teoricamente illimitato. Il sottrarre questo geode dalla MSS comporta che la parte mancante nel segnale del geode non sia rimossa dalle quote altimetriche. Ciò causa un errore sistematico che potrebbe essere interpretato come parte della MDT. Quindi la semplice differenza tra MSS e geode fornisce una MDT non filtrata che contiene anche un errore di omissione:

$$MDT_o = MSS_o - N_o = MDT + v_{MSS} - v_N^{comm} - v_N^{omiss}$$

Per ridurre l'errore di commissione e per ottenere una consistenza spettrale deve essere applicato un filtro. Si noti che le frequenze totalmente eliminate con il filtraggio diventano una componente dell'errore di omissione e devono essere considerate nella valutazione dell'errore globale, [Losch et al., 2002]. Tipicamente viene applicato un filtro spaziale isotropo come, ad esempio, un filtro gaussiano o di Hamming [Tapley et al., 2003, Jaine, 2006, Bingham et al., 2008]; risultati soddisfacenti sono stati ottenuti considerando anche un filtro non lineare e anisotropo come descritto in [Bingham, 2010]. La caratteristica comune di tutti questi approcci è che la soglia di filtro è sempre scelta in maniera arbitraria, basandosi su un confronto dei risultati a posteriori. In questo lavoro si propone un filtro di Wiener costruito direttamente sullo spettro della MDT tenendo conto delle caratteristiche stocastiche del rumore del geode e della MSS, tale da identificare teoricamente la soglia del filtro stesso.

Per definire il filtro di Wiener, la covarianza della MDT è modellizzata con le "degree variances" di una MDT di riferimento (CNES-CLS2009) dopo aver riempito i continenti come illustrato nel paragrafo precedente. Quindi il rumore della MDT è modellizzato stocasticamente:

$$C(v_{MDT}) = C(v_{MSS}) + C(v_N^{comm}) + C(v_N^{omiss})$$

Le “degree variances” usate per l’errore della MSS sono corrispondenti ad un rumore bianco con una deviazione standard pari a 1 cm; per l’errore di commissione del geoido si utilizzano le covarianze fornite con il modello GOCE (considerando non la matrice piena, ma solo la sua parte a blocchi [Gerlach et al., 2013]); infine l’errore di omissione del geoido è modellizzato con le “degree variances” del modello EGM2008.

Il filtro di Wiener corrispondente è quindi costruito ordine per ordine come illustrato nella seguente formula:

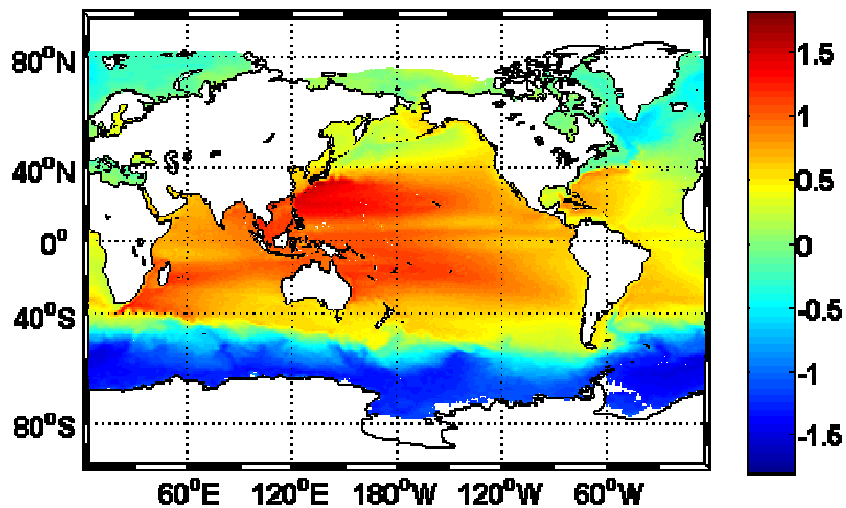
$$w_m = C_{MDT,m} (C_{MDT,m} + C_{V_{MDT,m}})^{-1}$$

$C_{MDT,m}$  è la matrice diagonale costruita con le “degree variances”, mentre  $C_{V_{MDT,m}}$  è la matrice piena dell’errore della MDT per un ordine  $m$  fissato. I coefficienti armonici della MDT  $\{c_m, s_m\}$  sono infine filtrati:

$$\hat{c}_m = w_m c_m$$

$$\hat{s}_m = w_m s_m$$

La MDT ottenuta seguendo la procedura descritta è mostrata in Fig. 2.



**Fig 2:** MDT geodetica ottenuta con soli dati da satellite, filtrata con un filtro di Wiener a grado e ordine 220

Il filtro di Wiener agisce ovviamente in modo tale che l’errore non superi mai il segnale. Confrontando le “degree variances” del segnale con quelle dell’errore del filtro si definisce il massimo grado armonico che deve essere considerato per la MDT, quindi la soglia del filtro corrisponde a grado massimo 220, si veda la Fig. 3. Un grado armonico maggiore di 220 introdurrebbe nel modello un forte errore di omissione.

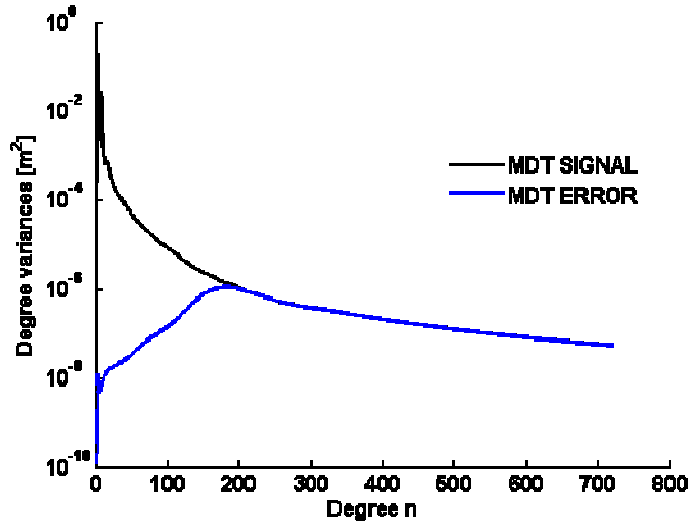


Fig. 3: Degree variances della MDT e del suo errore di stima utilizzando un filtro di Wiener

#### 4. Propagazione dell'errore

Con il filtro di Wiener è disponibile la matrice di varianza-covarianza della MDT filtrata. Poiché l'errore di commissione di GOCE è descritto, con buona approssimazione, con una matrice diagonale a blocchi, anche la MDT filtrata avrà una matrice di varianza-covarianza con la stessa struttura:

$$C_w = (I - w_m) C_{MDT,m}$$

Questo comporta che la distribuzione spaziale dell'errore della MDT dipenda dalla latitudine come mostrato in Fig. 4.

Dalla matrice di varianza-covarianze della MDT è possibile derivare la corrispondente matrice di varianza-covarianza delle velocità geostrofiche superficiali, ottenendo non solo le mappe delle varianze di tali correnti, ma anche le loro correlazioni.

Nelle Figure 5-6-7 sono rappresentati i risultati ottenuti nell'area della corrente del Golfo.

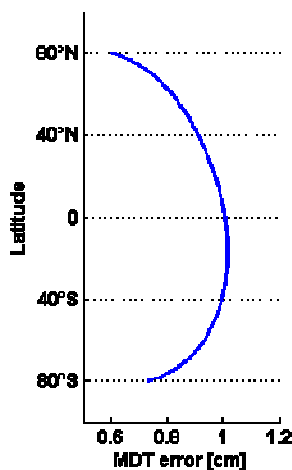
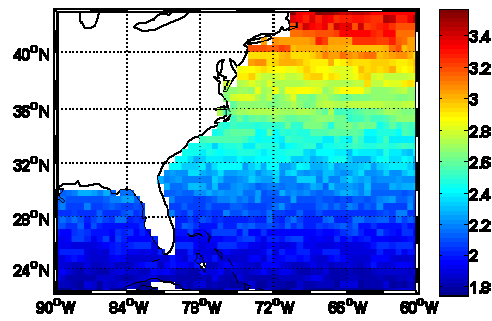
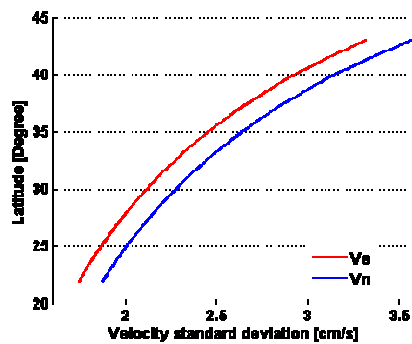


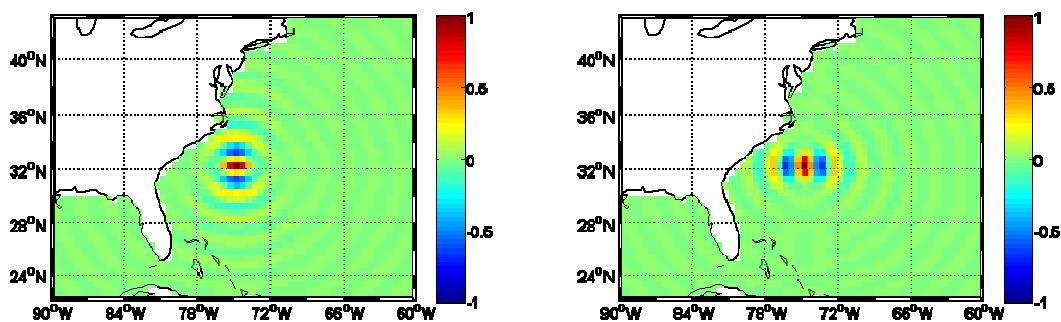
Fig. 4: Errore di stima della MDT filtrate con Wiener a grado 220 in funzione della latitudine.



**Fig. 5:** Scarto quadratico medio (cm/s) del modulo della velocità geostrofica nell'area della corrente del Golfo.



**Fig. 6:** Scarto quadratico medio della componente zonale (linea rossa) e della componente meridionale (linea blu) della velocità geostrofica della corrente del Golfo.



**Fig. 7:** Correlazioni della componente zonale (riquadro a sinistra) e della componente meridionale (riquadro a destra) delle correnti geostrofiche nell'area della corrente del Golfo.

## 5. Conclusioni

Il risultato principale è la produzione di una MDT descritta da un insieme di coefficienti armonici troncati a grado 220 e della corrispondente matrice di varianza-covarianza. Da un punto di vista metodologico il principale vantaggio di questa soluzione è che il filtro applicato non è definito empiricamente ma calcolato "automaticamente" in maniera ottimale sulla base delle proprietà statistiche dei dati.

I risultati potranno essere migliorati introducendo un modello più raffinato dell'errore della MSS e

considerando una sorta di MDT normale corrispondente alle frequenze più basse del campo in modo tale da rendere la MDT residua più omogenea e isotropa.

## **Bibliografia**

Albertella A., Savcenko R., Bosch W., Rummel R. (2008): Dynamic ocean topography – the geodetic approach. IAPG/FESG-Schriftenreihe 27, Institut fuer Astronomische und Physikalische Geodaesie, Forschungseinrichtung Satellitengeodaesie.

Albertella A., Rummel R. (2014): Goce geoid, mean dynamic ocean topography and geostrophic velocities. CGE Report 6, Centre of Geodetic Earth System Research, 3.

Bingham R.J., Haines K., Hughes C.W. (2008): Calculating the Ocean's Mean Dynamic Topography from a Mean Sea Surface and a Geoid. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, Vol. 25, 10, pp. 1808-1822.

Bingham R.J. (2010): Nonlinear anisotropic diffusive filtering applied to the ocean's mean dynamic topography, *Remote Sensing Letters*, Vol.1 (4), pp .205-212, doi:10.1080/01431161003743165.

Bingham R.J., Knudsen P., Andersen O., Pail R. (2011): An initial estimate of the North Atlantic steady-state geostrophic circulation from GOCE. *Geophysical Research Letters*, 38:L01601.

ESA - European Space Agency (1999): Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Mission. Report for mission selection of the four candidate Earth Explorer missions. Tech. rept. European Space Agency, SP-1233(1), Noordwijk.

Gerlach C., Fecher T. (2013): Approximations of the GOCE error variance-covariance matrix for least-squares estimation of height datum offsets; *Journal of Geodetic Science*, Vol. 2012, Nr. 2, Heft 4, pp 247-256, ISSN 2081-9943, DOI: [10.2478/v10156-011-0049-0](https://doi.org/10.2478/v10156-011-0049-0).

Gilardoni M., Reguzzoni M., Albertella A. (2015): Global Mean Dynamic Ocean Topography based on GOCE data and Wiener filters, poster presented at EGU 2015 Wien.

Jayne, S. (2006): Circulation of the North Atlantic Ocean from altimetry and the gravity recovery and climate experiment geoid. *Journal of Geophysical Research*, 111, p. C03005, doi:10.1029/2005JC003128.

Knudsen P., Bingham R., Andersen O., Rio M.H. (2011): A global mean dynamic topography and ocean circulation estimation using a preliminary GOCE gravity model. *Journal of Geodesy* 85/11, pp. 861-879.

Losch M., Sloyan B.M., Schröter J., Sneeuw N. (2002): Box inverse models, altimetry and the geoid:

problems with the omission error. *Journal of Geophysical Research* 107(C7) doi:[10.1029/2001JC000855](https://doi.org/10.1029/2001JC000855)

Pail R., Goiginger H., Mayrhofer R., Schuh W.-D., Brockmann J. M., Krasbutter I., Höck E., Fecher T. (2010): GOCE gravity field model derived from orbit and gradiometry data applying the time-wise method; in: Lacoste-Francis, H. (eds.) *Proceedings of the ESA Living Planet Symposium*, ESA Publication SP-686, ESA/ESTEC, ISBN (Online) 978-92-9221-250-6, ISSN 1609-042X.

Rummel R., Gruber T. (2010): Gravity and Steady-State Ocean Circulation Explorer GOCE, in: Flechtner F., Gruber T., Guentner A., Manda M., Rothacher M., Schoene T., Wickert J. (eds.) *System Earth via Geodetic - Geophysical Space Techniques*, pp. 203-212, Springer, Heidelberg, Berlin.

Schaeffer P., Faugere Y., Legeais J.F., Ollivier A., Guinle T., Picot N. (2012): The CNES CLS11 Global Mean Sea Surface Computed from 16 Years of Satellite Altimeter Data. *Marine Geodesy*, 2012, Special Issue, *Jason-2*, Vol.35.

Tapley B., Chambers D., Bettadpur S., Ries, J. (2003): Large scale ocean circulation from the GRACE GGM01 geoid. *Geophysical Research Letters*, 30, p. 2163, doi:[10.1029/2003GL018622](https://doi.org/10.1029/2003GL018622).