

La cicloide o la bella Elena della matematica

Parte Seconda

Paola Magnaghi-Delfino Tullia Norando

Sommario

La cicloide è chiamata *La bella Elena della Geometria* o *Il pomo della discordia* non solo per le sue numerose proprietà e per la sua perfezione estetica ma anche perché è stata oggetto di numerose dispute fra matematici sulla priorità e sulla correttezza della scoperta di alcune delle sue proprietà. La nostra esposizione sulla curva cicloide è divisa in tre parti: nel primo articolo abbiamo parlato degli aspetti matematici della curva e delle sue principali proprietà, in questo secondo tratteremo delle sue applicazioni in vari campi e nel terzo parleremo degli epicicli, soprattutto riguardo all'astronomia.

1 Introduzione

La curva cicloide è stata molto studiata dai matematici, dagli architetti e, in generale, dagli scienziati. In questo articolo presentiamo le applicazioni della cicloide alla fisica, alla medicina, allo sport, all'architettura e, infine, vedremo che la curva cicloide è stata citata persino in letteratura.

2 Cicloide e fisica

2.1 Pompe a lobi

Le pompe a lobi possono essere usate per movimenti di cancelli, barriere e per la lubrificazione delle scatole del cambio nei motori a combustione interna. Sono costituite da una camera sagomata, al cui interno ruotano su assi paralleli ed in modo sincrono due rotori a lobi. Nella rotazione, i lobi muovono il fluido dalla bocca di aspirazione a quella di mandata, creando così un flusso ragionevolmente continuo.

I lobi hanno una forma ad otto, la cui sezione è costituita da una epitrocoide a due lobi. L'epitrocoide è la traiettoria di un punto A fissato ad una distanza d da una circonferenza di raggio r che rotola senza strisciare su un'altra circonferenza fissa di raggio R , esternamente ad essa. L'equazione parametrica di una epitrocoide è:

$$\begin{aligned}x &= (R + r)\cos\alpha - d\cos\left(\frac{R+r}{r}\alpha\right) \\y &= (R + r)\sin\alpha - d\sin\left(\frac{R+r}{r}\alpha\right)\end{aligned}\quad (2.1)$$

Nel caso $d < r$ e $r = R/2$, si ottiene una epitrocoide a due lobi.

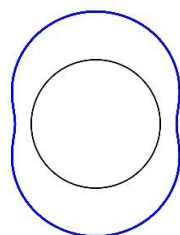


Figura 2.1
Immagine da animazione GeoGebra
a cura degli autori

Schema di una pompa a lobi

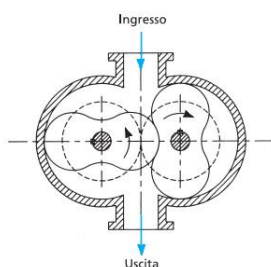


Fig.2.2

www.portogruaro2000.it

2.2 Motori Wankel

Questo motore fu presentato da Felix Wankel nel 1957 in collaborazione con il dott. Froede, capo dei tecnici della N.S.U., che apportò modifiche sostanziali al progetto iniziale del motore. La prima vettura azionata da un motore Wankel fu, nel 1963, la N.S.U. Spider; nonostante il motore avesse una cilindrata di soli 498 cc sviluppava una potenza di 50 CV e spingeva l'auto ad oltre 150 km/h a fronte di un consumo relativamente parco per l'epoca. Tra il 1963 e il 1970, la Mercedes Benz realizzò una decina di prototipi tra cui le C111 a tre e quattro rotori e una 350 SL Quadrirrotore utilizzata normalmente dallo stesso Wankel.



Fig.2.3

Automobile C111

Oltre alla Mercedes, altre industrie automobilistiche produssero automobili con il motore Wankel; fra di esse ricordiamo la GM, con il prototipo Chevrolet, e la American Motor, con una versione della Pace. In campo motociclistico il propulsore rotativo fu utilizzato dalla NSU, dalla Sachs, dalla Suzuki (sul modello "RE-5" del 1975) e dalla Norton che riuscì anche ad ottenere delle vittorie in gare del campionato inglese.

Il cuore del Wankel è il pistone, un rotore prismatico a base triangolare equilatera con lati leggermente convessi; il rotore è contenuto all'interno di uno statore, nel quale sono praticate le luci per l'aspirazione della miscela aria-carburante, preparata da un carburatore, e per lo scarico dei gas combusti. La cavità interna dello statore ha una sezione la cui forma è quella di un'epitrocoide a due lobi; le basi dello statore sono costituite da due pareti piane, che presentano centralmente un foro per il passaggio dell'albero motore.

Il pistone con la sua rotazione produce le variazioni di volume necessarie per la realizzazione delle fasi del ciclo. Il rotore ruota senza quasi attrito su un ingranaggio il cui asse è solidale col basamento. La rotazione del rotore simula un albero eccentrico (cioè un albero a gomito), solidale con l'albero motore. Grazie a questa disposizione, la spinta dei gas su ogni lato del rotore è trasformata in coppia sull'albero motore.

Fra i vantaggi del motore Wankel rispetto ai vari tipi di motore alternativo a combustione interna si ricordano: un minor numero di parti in movimento e una minore rumorosità e minori vibrazioni;

un' elevata leggerezza dovuta alle dimensioni ridotte e perciò un miglior rapporto potenza/peso;
una minore emissione inquinante di ossidi di azoto, dovute alla minore temperatura media dei gas;
una semplicità progettuale e manutentiva.

Fra gli svantaggi di questo tipo di motore si ricordano: la scarsa durata degli elementi di tenuta del rotore; il consumo di carburante che in generale è maggiore rispetto ad un omologo motore alternativo; la problematica lubrificazione dei segmenti apicali e il tasso di idrocarburi incombusti molto elevato.

Nell'aviazione leggera, il motore Wankel è stato introdotto in modo massiccio molti decenni dopo perché la relativamente bassa longevità del motore ne sconsigliava l'utilizzo. Oggi invece se ne apprezzano i numerosi aspetti positivi già elencati.



Fig.2.4

<http://digilander.libero.it/rm001/ing/wankel.htm>

3 Cicloide e anatomia

Parecchi ortopedici hanno studiato i vari tipi di snodo per i tutori del ginocchio in modo da rispettare a pieno il fisiologico movimento di roto-traslazione proprio di questa articolazione.

Uno snodo, il quale costringa i capi articolari ad un movimento innaturale, sottopone i legamenti intrinseci ed estrinseci e la capsula articolare a sollecitazioni anomale. Queste sono controproducenti nel processo di guarigione delle lesioni legamentose. Si è studiato un tipo di snodo, a centro variabile, che rispetti la fisiologica dinamica articolare. Ad esempio si può considerare uno snodo a doppio centro: i due bracci vengono posti a contatto tra loro con un estremo, ognuno dei quali presenta un profilo arrotondato e disegnato a ruota dentata. Al centro di ogni singolo arrotondamento è posto un perno in modo che ad un movimento di rotazione di un braccio, attorno al proprio perno, corrisponda un analogo movimento, nel senso opposto, dell'altro braccio. Tenendo vincolato il braccio tibiale, quello femorale, nella flessione, eseguirà un moto cicloidale retrogrado.



Fig.3.1

Differenza tra il profilo radiografico e lo snodo con il doppio centro.
<http://research.ktj.it/confronto-snodi.html>

In figura si vede un confronto tra il profilo articolare del modello e quello reale radiografico (sfondo opaco). L'ombra del modello, a fine flessione, si trova in una posizione marcatamente arretrata ed addirittura più in basso rispetto al piatto tibiale disegnato dal profilo radiologico.

4 Cicloide e sci

Ricordiamo che la cicloide, essendo una curva brachistocrona, rappresenta il cammino più breve e che il primo studio di questa proprietà fu fatta da Bernoulli.

In campo sciistico sono stati fatti esperimenti per dimostrare che gli sciatori nelle gare di slalom gigante o speciale percorrono o cercano di percorrere archi di cicloide.

Nel 2009 un gruppo di ragazze del Liceo Scientifico Volta di Milano, nell'ambito del progetto "Progettiamo con la Matematica" realizzato in collaborazione con il laboratorio FDS del Politecnico di Milano, hanno condotto un esperimento confrontando due tracciati: il primo costituito da una serie di archi di cicloide collegati fra loro, il secondo da una curva che si avvicinasse il più possibile ai pali dello slalom mediante un percorso più intuitivo ma meno efficace. Le ragazze hanno elaborato le seguenti conclusioni:

- nell'impostare una curva (specialmente con gli sci sciancrati che esistono ora) lo sciatore deve andare più dritto possibile verso la massima pendenza, usare poco lo spigolo e quindi sfruttare poco la sciancratura dello sci,
- al momento giusto (a giudizio dell'atleta) deve curvare incidendo molto con lo spigolo e, utilizzando il piccolo raggio di curvatura dello sci corto, e molto sciancrato, per riuscire a mantenere una linea ideale che si avvicina il più possibile alla cicloide.

Le ragazze ne hanno dedotto che la vittoria premia chi conduce meglio. Poiché la cicloide può essere costruita con cerchi di varie dimensioni, a seconda delle distanze e degli angoli tra le porte, gli atleti possono percorrere delle traiettorie vicine a cicloidi di diverse dimensioni.



Fig. 4.1

fds.mate.polimi.it/file/1/File/scheda_descrittiva/2007-08%202.pdf

5 Cicloide e architettura

In questo paragrafo riportiamo alcune costruzioni che hanno la cicloide come parte essenziale. Tutte le figure in questo paragrafo si trovano in rete.

1. Sfruttando la proprietà di brachistocronia, nel '700 furono costruiti acquedotti che seguivano il profilo di una cicloide, come nel caso del ponte-acquedotto intitolato alla Madonna della Stella, situato vicino a Gravina di Puglia e costruito nel 1743. Il parapetto sul lato sud ha la funzione di acquedotto ed ha il profilo di una cicloide: in tal modo il logoramento causato dall'acqua che vi scorre risulta minimo.



Fig. 5.1

2. Negli Stati Uniti, troviamo il Marin County Civic Center a San Rafael (California) realizzato da Frank Lloyd Wright. L'edificio, inaugurato nel 1962, fu l'ultima opera del grande architetto.



Fig. 5.2

3. Sempre negli Stati Uniti, troviamo il Kimbel Art Museum a Fort Worth (Texas) realizzato dall'architetto Luis Kahn.



Fig. 5.3

4. Nel 1992, l'architetto Renzo Piano progetta per le Colombiadi di Genova una costruzione denominata "Bigo". Il nome e il design si ispirano al *bigo*, ovvero la gru usata per il carico e lo scarico delle merci nel porto di Genova. Il Bigo possiede, oltre a una funzione di immagine, anche una funzione strutturale (sostenere il tendone della piazza delle feste) e una funzione turistica, poiché possiede infatti un ascensore panoramico che sale fino a 40 m di altezza e ruota a 360 gradi.



Fig. 5.4

5. La chiesa-santuario, costruita a San Giovanni Rotondo e dedicata a Padre Pio, venne commissionata dall'Ordine dei frati Minori Cappuccini della provincia di Foggia, all'architetto italiano Renzo Piano. Con i suoi 6000 m² è in grado di contenere 7000 persone ed è una delle chiese più grandi in Italia per dimensioni. La chiesa è stata inaugurata il 1° luglio 2004.



Fig. 5.5

6. I ponti di Calatrava a Reggio Emilia, presenti lungo l'autostrada A1, sono una serie di tre ponti progettati dall'architetto Santiago Calatrava. La loro realizzazione fa parte del

progetto di ristrutturazione e riqualificazione dell'area di accesso al casello autostradale e alla stazione di Reggio Emilia sulla linea ferroviaria ad alta velocità Milano-Bologna
L'inaugurazione è avvenuta il 20 ottobre 2007.



Fig. 5.6

6 Cicloide e letteratura

La curva cicloide è citata in alcuni saggi e romanzi; di seguito ne riportiamo alcuni esempi.

1. Quella curva arcuata, sono più di cinquanta anni che mi venne in mente il descriverla e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte. Feci sopra di lei, e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrare qualche passione, e parvenni in principio che tale spazio potesse essere triplo del cerchio che lo descrive; ma non fu così, benché la differenza non sia molta. Ebbi circa un anno fa una scrittura di un padre Mersenno dei Minimi di san Francesco di Paola mandatami da Parigi, ma scrittami in caratteri tali che tutta l'Accademia di Firenze non ne potesse intender tanto che se ne potesse trar costruito alcuno.

Galileo Galilei

2. La recrudescenza dei mali di mio fratello cominciò con il mal di denti che gli tolse completamente il sonno. Ma in qual modo uno spirito come il suo avrebbe potuto stare sveglio e non pensare a niente? E' per questo che proprio durante le insonnie, così frequenti e affaticanti, gli balenarono una volta alcuni pensieri sulla cicloide. La prima idea fu seguita da una seconda e la seconda da una terza; e infine una moltitudine di pensieri succedentisi gli uni agli altri. Essi si rivelarono, quasi suo malgrado, la dimostrazione della cicloide, del che fu egli stesso sorpreso. Ma poiché da molto tempo aveva rinunciato a tutte queste cose, non pensò minimamente di scrivere nulla. Tuttavia, avendone parlato ad una persona [...], questa persona concepì intorno a questa scoperta un progetto che concerneva solo la gloria di Dio, e incoraggiò mio fratello a scrivere tutto quello che gli era balenato nello spirito, e a farlo stampare .

Perier G., Vita di Pascal, Il Saggiatore, Milano 1958,

3. C'è da meravigliarsi che gli Antichi non l'abbiano considerata. Difatti non si trova nulla in proposito nei loro scritti, benché non ci sia nient'altro in questa linea che il percorso tracciato nell'aria dal chiodo di una ruota quando è animata dalla sua rotazione ordinaria, sin dall'istante in cui questo chiodo cominciava ad alzarsi al di sopra del suolo, fino a quando il rotolamento continuo della ruota l'abbia riportato a terra dopo un giro completo.

Blaise Pascal

4. E fu a questo momento che padre Caspar ebbe il suo trionfo. Allora, spiegò, se la terra gira intono al sole, ma il sole ruota attorno a qualcosa d'altro[...], abbiamo il problema della roulette- di cui

Roberto aveva sentito parlare a Parigi, dato che da Parigi era arrivato in Italia tra i galileiani, che le pensavano proprio tutte pur di disordinare il mondo.

“Cos’è la roulette” chiese Roberto.

“Tu la puoi chiamare anche trocoides o cycloides, ma poco muta. Immagina tu la ruota”

“Quella di prima?”

“No, ora tu immagina la ruota di un carro. Et immagina tu che sul cerchio di quella ruota ci sta un chiodo. Ora immagina che la ruota ferma sta, et il chiodo proprio sopra il suolo. Ora tu pensa che il carro va et la ruota gira. Che cosa tu pensi che accadrebbe a questo chiodo?”

“Beh, se la ruota gira, a un certo punto il chiodo sarà in alto, ma poi quando la ruota ha fatto tutto il suo giro si trova di nuovo vicino a terre

“Ora tu ascolta, bamboleggiione. Tu dici che questo chiodo si trova a terra nello stesso punto dove era prima?” “Aspettate un momento...No, se il carro andava avanti, il chiodo si trova a terra, ma molto più avanti”

“Quindi esso non ha compiuto un movimento circolare?”

“No. Per tutti i santi del paradiso” aveva detto Roberto.

“Tu non devi dire Pertuttiisantidelparadiso”.

“Scusate. Ma che movimento ha compiuto?”

“Ha una trochoides compiuto, e perché tu capisci dico che quasi è come il movimento di una palla che tu lanci davanti a te, poi fa un altro arco di cerchio, et poi nuovamente- solo che mentre la palla a un certo momento fa archi sempre più piccoli, il chiodo archi sempre regolari farà, se la ruota sempre alla medesima velocità va”.

U. Eco, L'isola del giorno prima, Bompiani, Milano, 1994

5. Arrivammo finalmente al palazzo reale e fui ammesso nella sala delle udienze; qui vidi il re seduto sul trono circondato da persone d'alto rango. Davanti al trono c'era un tavolo pieno di globi, sfere e strumenti matematici d'i tutti i generi[...].Ebbi l'occasione di pranzare con quattro dignitari che ricordavo d'aver visto vicino al re. Ci servirono due portate di tre piatti ciascuna: la prima composta di un cosciotto di montone dalla forma di triangolo equilatero, di arrosto di manzo a forma di romboide e una torta a cicloide; la seconda composta di due anitre disposte a violino, salsicce e insaccati dalla forma di flauti e di oboe, petto di vitello tagliato come un'arpa. I camerieri ci tagliarono il pane a coni, cilindri, parallelogrammi ed altre figure geometriche.

J.Swift, I viaggi di Gulliver, Benj. Motte, London, 1726

6 Sollevando il quartiere si scoprono le grandi marmitte, due in tutto, e ciascuna della capacità di parecchie botti. Quando si è dietro strofinarle, il luogo presta per le profonde meditazioni matematiche. Fu nella marmitta sinistra del Pequod, che per la prima volta mi colpì il fatto notevole che, in geometria, tutti i corpi che scivolano giù per il cicloide, ad esempio la mia steatite, da qualunque punto discendano impiegano sempre lo stesso tempo.

H. Melville, Moby Dick, Harper and Brothers, New York, 1851

Bibliografia

- [1] Aczel A., *Il taccuino segreto di Cartesio*, Mondadori Editore, Milano 2006
- [2] Boyer C., *A History of Mathematics*, New York, Willey 1968
- [3] Cresci L., *Le curve celebri*, Franco Muzzio Editore, Padova 1998
- [4] Cresci L., *Le curve matematiche*, Hoepli, Milano 2005
- [5] de Grandt F., *Etudes sur l'histoire du calcul infinitesimal*, in *Revue d'histoire des sciences*, tome XXXIX-3, 1986, pp.195-222

- [6] Degli Angeli S., *De Superficie unguiae et de quartis liliorum parabolicorum et cycloidalium tractatus duo geometrici*, J.La Nou 1661
- [7] Desaguliers J.T. *A Course of Experimental Philosophy*, T.Longman,1744
- [8] Eco U., *L'isola del giorno prima*, Bompiani, Milano 1994
- [9] Fenaroli G, Garibaldi.U., Penco M.A., *Il pendolo e la cicloide nella fisica matematica del '600*, Atti del III Congresso nazionale di storia della fisica, Facoltà di Ingegneria, Palermo, 1983, vol. 1, pp. 63-74
- [10] Gravesande W.J., *Physices elementa mathematica, experimentis confirmata*, apud Petrum Vander, Olanda 1721
- [11] Huygens C., *Horologium oscillatorium: sive, De motu pendulorum ad horologia aptato* Impression anastaltique Culture et civilisation, 115 Av.Gabriel Lebon, Bruxelles 1966
- [12] Kline M., *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Milano 1962
- [13] Melville H., *Moby Dick*, Harper and Brothers, New York 1851
- [14] Milizia F. *Principi di architettura civile*. Tomo terzo. Edito a spese di Remondini di Venezia. MDCCLXXXV
- [15] Perier G., *Vita di Pascal*, Il Saggiatore, Milano 1958,
- [16] Philipps J.P., *Brachistochrone-Tautochrone-Cycloid. Apple of Discord*, The Mathematical Teacher May, 1967, pp. 506-508
- [17] Rouseball W.W., *Compendio di storia delle matematiche*, 2 edizione, Zanichelli, Bologna 1927
- [18] Swift J., *I viaggi di Gulliver*, Benj. Motte, London 1726
- [19] Tessieri S., *Il lungo cammino della cicloide*. Parte Prima, L'insegnamento delle matematiche e delle scienze integrate, vol. 22A, n. 1 febbraio 1999, pp. 14-34
- [20] Tessieri S., *Il lungo cammino della cicloide* Parte Seconda, L'insegnamento delle matematiche e delle scienze integrate, vol. 22B, n. 1 aprile 1999, pp. 108-138
- [21] Viviani V., *Raccolta di autori italiani che trattano del moto delle acque* Jacopo Marsigli editore, Bologna, 1822
- [22] Whitman E.A., *Some historical notes on the cycloid*, An. Math. Monthly, 1943, pp. 309-315

Sitografia

Siti matematici:

- www.dipmat.unipg.it/annarita/dispense/orvieto.doc
- www.mathcurve.com
- www.mathpages.com/rr/s8-03/8-03.htm
- <http://ciencianet.com/helena.htm>
- www.libe.lic.ti-edu.ch
- <http://2dcurves.com/roulette/roulettec.html>
- <http://temasmaticos.uniandes.edu.co>
- http://matematica.unibocconi.it/GuarinoGuarini/GUARINI_articolo.htm
- www.extrabyte.info/2009/04/15/-animazione-di-una-cicloide/
- www.savoldelli.net/mandelbrot/cicloide/cicloide.html

Siti di musei:

- www.museo.unimo.it
- www.musei.unipd.it/fisica/collezioni/teatro.html
- <http://www.meccanica.com/meccanica/modules/article/view.article.php/27>

Motore Wankel:

- <http://digilander.libero.it/rm001/ing/wankel.htm>

Cicloide e anatomia:

-<http://www.ktj.it/532fotografico.htm>

Cicloide e sci:

-<http://ulisse.sissa.it/biblioteca/saggio/2007/Ubib070316s001>

-fds.mate.polimi.it/file/1/File/scheda_descrittiva/2007-08%202.pdf

-www.skitraining.it

Contatti

Paola MAGNAGHI-DELFINO

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano (MI), Italy – paola.magnaghi@polimi.it

Tullia NORANDO

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano (MI), Italy – tullia.norando@polimi.it