

INVARIANZA DI SCALA NELLA STRUTTURA GEOMETRICA DELLE ARENARIE

La geometria dei frattali è in grado di descrivere oggetti che presentano la particolare caratteristica, detta invarianza di scala, per la quale essi, osservati a ingrandimenti diversi, mostrano sempre lo stesso aspetto.

Molti dei fenomeni studiati in geologia presentano proprietà di invarianza di scala ed attualmente lo studio di geometrie naturali in termini di strutture frattali sta rivestendo sempre maggiore importanza nelle scienze geofisiche.

Uno dei principali campi di applicazione nella geologia applicata è quello relativo alla analisi tessiturale delle rocce sedimentarie, finalizzato alla determinazione delle caratteristiche idrauliche di tali rocce e dunque alla previsione dei processi di trasporto dei fluidi al loro interno.

PAROLE CHIAVE: *Invarianza di scala, geometria dei frattali.*

KEY WORDS: *Sealing, fractal properties.*

Introduzione

Molti dei fenomeni studiati in geologia mostrano spiccate proprietà di invarianza di scala. I processi di frammentazione della crosta terrestre, ad esempio, avvengono con meccanismi analoghi a scale molto diverse tra loro (Turcotte, 1986); allo stesso modo la struttura dei reticoli di drenaggio si mantiene essenzialmente la stessa, indipendentemente dalla scala di osservazione (La Barbera & Rosso, 1990); la statistica che, per i terremoti, lega la frequenza degli eventi alla relativa magnitudo, interpretata dalla legge di Gutenberg-Richter (1954), è un altro tipico esempio di processo scala-invariante.

Questo fatto, ben noto e, come abbiamo appena visto, talvolta anche formalizzato matematicamente da leggi empiriche ampiamente accettate, ha suscitato recentemente un rinnovato interesse dovuto essenzialmente all'impulso che i lavori di Mandelbrot (Vedi, ad esempio, 1982) sulla geometria dei frattali hanno dato alle scienze geofisiche. Questo strumento è particolarmente indicato per descrivere il disordine proprio degli oggetti naturali. L'ordine, in geometria, è solitamente associato al concetto di periodicità. Gli oggetti naturali, spesso, sfuggono a questo tipo di approccio: la topografia di una catena montuosa, la disposizione delle fratture in una massa rocciosa, la tessitura di una coltre sedimentaria mostrano andamenti fortemente non periodici. Tale disordine, tuttavia, possiede sovente una qualche struttura o coerenza interna: senza un opportuno riferimento è assai difficile, per ciascuno dei casi appena citati, comprendere da una immagine fotografica la scala di osservazione. Questa caratteristica, per la quale un oggetto, osser-

vato a scale diverse, mostra sempre lo stesso aspetto, prende il nome di auto somiglianza o invarianza di scala.

La geometria dei frattali è in grado di descrivere efficacemente questo tipo di oggetti caratterizzandoli con una dimensione che, al contrario di quanto avviene nella geometria euclidea, non è intera. Un esempio classico riportato da Feder (1982) è quello della costa della Norvegia che, misurata su carte a scale diverse, da luogo a diverse lunghezze secondo i valori riportati in Fig. 1. Se d è la lunghezza di un ideale regolo utilizzato per misurare la lunghezza $L(\delta)$ della costa, i punti sul grafico di Fig. 1, che riporta la lunghezza della costa norvegese in funzione della scala della misura, risultano ben interpretati dalla relazione

$$L(\delta) = \alpha \cdot \delta^{1-D} \quad (1)$$

Per una generica curva descritta dalla geometria euclidea, pensiamo ad esempio ad un cerchio, deve essere $D=1$: in tal caso, per valori di d sempre più piccoli, la costante α rappresenta sempre con migliore approssimazione proprio la lunghezza della curva.

L'andamento dei punti in figura dovrebbe così tendere asintoticamente all'orizzontale. Nel caso illustrato invece, a causa dell'estrema tortuosità che si riscontra in egual misura alle diverse scale, le misure si dispongono lungo una retta inclinata per la quale risulta $D=1,52$. Un tale tipo di struttura geometrica prende il nome di frattale e il parametro D , conseguentemente, è chiamato dimensione frattale.

L'analisi delle geometrie naturali in termini di strutture scala invarianti o frattali sta rivestendo sempre maggiore importanza nelle scienze geofisiche (Ve-

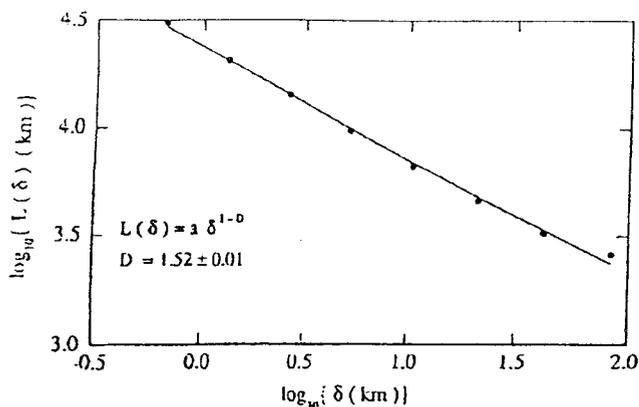


FIG. 1 — La lunghezza della costa norvegese in funzione della scala della misura.

— Norwegian coast line length as a function of scale measuring.

di, ad esempio, il manuale di Turcotte, 1992). Uno dei più rilevanti campi di applicazione della geometria dei frattali nel settore della geologia applicata è quello relativo all'analisi tessiturale delle rocce sedimentarie. Diversi lavori sperimentali, maturati in campo petrolifero, hanno mostrato come la superficie e, talvolta, il volume dei vuoti di alcuni campioni di arenarie siano caratterizzati da proprietà di invarianza di scala. Numerose analisi teoriche hanno mostrato l'importanza di questi risultati ai fini della determinazione delle caratteristiche idrauliche di tali rocce e, dunque, della previsione dei processi di trasporto dei fluidi al loro interno.

Invarianza di scala negli ammassi granulari incoerenti

Ogni geometria frattale, sia pure estremamente complessa, può essere interpretata come il prodotto di processi genetici basati su poche e semplici regole ripetute un gran numero di volte. È il caso, ad esempio, della aggregazione di alcuni cristalli che, sulla scorta dei processi elementari che presiedono alla nucleazione e crescita, danno luogo a complesse strutture dendritiche. Anche i processi di frammentazione della crosta terrestre danno origine, secondo quanto riportato in letteratura, ad oggetti frattali: Turcotte (1986) ha analizzato la distribuzione granulometrica dei frammenti rocciosi derivanti da processi di disgregazione avvenuti nelle più svariate condizioni ambientali e su scale spaziali e temporali molto diverse tra loro. I risultati evidenziano una invarianza di scala nella distribuzione dei frammenti che risulta, per ogni singolo esperimento, ben interpretata dalla relazione

$$N(r) \propto r^{-D} \tag{2}$$

dove $N(r)$ è il numero di frammenti la cui dimensione caratteristica è minore o uguale ad r .

Campione	Fonte	D
Proiettili di artiglieria su gabbro (piombo)	Lange et Al. [1984]	1,44
Proiettili di artiglieria su gabbro (acciaio)	Lange et Al. [1984]	1,71
Meteoriti (Praire Network)	McCosky [1968]	1,86
Teoria della frammentazione	Turcotte [1986]	1,97
Gneiss disaggregato	Hartmann [1969]	2,13
Granito disaggregato	Hartmann [1969]	2,22
Esplosione chimica (0,2 kt)	Schoutens [1979]	2,42
Asteroidi (risultati teorici)	Hellyer [1971]	2,48
Esplosione nucleare (61 kt)	Schoutens [1979]	2,50
Carbone	Bennett [1936]	2,50
Materia interstellare Asteroidi (risultati teorici)	Mathis [1979]	2,50
Proiettili su basalto	Dohnavi [1969]	2,51
Argille	Fujiwara [1977]	2,56
Sabbie e ghiaie	Hartmann [1969]	2,61
Meteoriti lapidee	Hartmann [1969]	2,82
Asteroidi	Hawkins [1960]	3,00
Ceneri e pomice	Donnison et Al. [1984]	3,05
	Hartmann [1969]	3,54

TAB. 1 — Dimensioni frattali per distribuzioni di frammenti lapidei (Turcotte, 1986).

— Fractal dimension of rock fragment size distributions (Turcotte, 1986).

La Tab. 1, tratta da Turcotte (1986) mostra gli esponenti D che caratterizzano la relazione (2) per una vasta gamma di processi di frammentazione e per vari tipi di materiale lapideo.

Ghilardi *et alii* (1992a), Ghilardi *et alii* (in stampa) hanno mostrato che la (2) è in grado di interpretare, al pari di altri approcci, molte distribuzioni granulometriche relative ad un vasto spettro di ambienti litologici. Nel primo dei due lavori citati sono inoltre proposti i risultati di una serie di esperimenti numerici nei quali per una miscela di sedimenti generata attraverso la (2) viene simulata la sedimentazione, tenendo conto solo dell'azione della gravità (Fig. 2).

La struttura geometrica dell'aggregato risulta scala invariante. Questo significa che la tessitura, osservata ad ingrandimenti molto diversi tra loro, mostra sempre la stessa ricchezza di dettagli. Inoltre il solido geometrico costituito dallo spazio dei vuoti è un frattale così come lo è la superficie che lo racchiude; tutti e due sono inoltre caratterizzati dalla stessa dimensio-

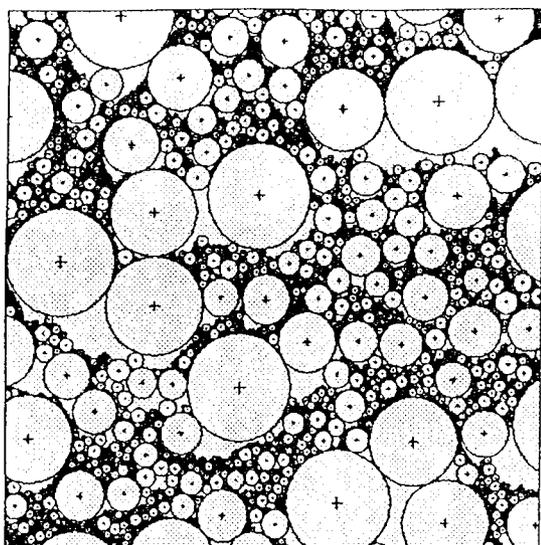


FIG. 2 — Sedimentazione simulata a partire da una distribuzione granulometrica frattale (Ghilardi *et alii*, in stampa).

— Simulated sedimentation derived from a fractal granulometric distribution (Ghilardi *et alii*, in press).

ne frattale. È noto che, tramite relazioni come quella di Carman.

$$K = \frac{m^2 \Pi}{C} \quad (3)$$

è possibile stimare la conduttività idraulica di un mezzo poroso granulare a partire *i*) dalla porosità e *e* *ii*) dal rapporto tra il volume dei vuoti e la loro superficie m ; la costante C che compare al denominatore della (3) dipende dalla forma dei granuli e per oggetti sferici viene solitamente posta eguale a 5. Se nel caso di un aggregato frattale si assume che D dipenda soltanto dal processo di frammentazione, è possibile dimostrare che, almeno in linea di principio, un parametro tecnico quale la conduttività può essere stimato in base a conoscenze legate sostanzialmente all'origine dell'aggregato stesso.

Per le rocce sedimentarie, la cui componente granulare è frutto dei processi di disgregazione, trasporto e successiva deposizione dei frammenti derivanti dalla roccia madre, ci si può aspettare che, almeno per bassi stadi di litificazione, un modello quale quello appena descritto possa fornire indicazioni di qualche interesse.

Invarianza di scala nei processi di litificazione delle arenarie

Nel caso specifico delle arenarie, è noto dalla letteratura (Katz & Thompson, 1985, Wong *et alii*, 1984) come lo spazio dei vuoti mostri proprietà di invarianza di scala laddove il processo di litificazione sia dovuto alla nucleazione ed accrescimento di cristalli au-

tigeni secondari oppure alla presenza di particelle argillose, entrambi costituenti l'elemento causale dominante del processo di litificazione. Non sono invece noti studi specifici su fenomeni di invarianza di scala dovuti alla distribuzione granulometrica.

La stima di caratteristiche macroscopiche delle rocce quali porosità e conduttività idraulica o elettrica sono solitamente basate su criteri essenzialmente empirici. Nei casi appena descritti è invece possibile, sfruttando le proprietà di invarianza di scala, pervenire a stime basate su modelli interpretativi del processo fisico di base. Tali modelli, tramite algoritmi di simulazione di tipo frattale, producono una efficace rappresentazione geometrica dell'intero processo morfogenetico della roccia consentendo di evidenziare i fattori che ne determinano le caratteristiche di interesse.

Nel seguito riportiamo un algoritmo in grado di simulare il riempimento dello spazio intergranulare tramite un semplice modello di nucleazione e crescita di cristalli. La procedura, basata su un automa cellulare, fornisce risultati in pieno accordo con il modello proposto da Katz & Thompson.

Il modello si basa su di una estensione dei classici algoritmi di aggregazione di particelle noti in letteratura come DLA o Diffusion Limited Aggregation (Witten & Sander, 1981). Lo spazio intergranulare viene discretizzato come una matrice quadrata di dimensione opportuna (nelle nostre simulazioni 480×480 celle). All'inizio del processo, un certo numero di particelle, che rappresentano gli ioni disciolti in soluzione, viene distribuito casualmente all'interno dello spazio dei pori secondo un prefissato livello di concentrazione. Ad ogni passo temporale di calcolo, ciascuna particella si sposta in modo casuale in una posizione adiacente a quella precedente. Un nucleo cristallino si forma non appena due o più particelle, secondo i parametri imposti al modello, vengono ad occupare la stessa posizione sulla superficie di contorno. Successivamente, se altre particelle occupano una posizione adiacente prima che tale nucleo decada, il processo di accrescimento ha inizio dando luogo a aggregati del tipo di quelli rappresentati in Fig. 3. Il modello proposto può essere adattato a diverse condizioni in relazione all'ambiente geologico che si vuol simulare. In particolare la concentrazione può essere mantenuta costante oppure, come ad esempio suggerito da Katz & Thompson (1985), fatta diminuire lentamente nel tempo. La dimensione frattale della struttura cristallina risultante viene dunque a dipendere dai diversi fattori che determinano la cinetica chimica del processo di cristallizzazione.

Analisi sperimentali delle proprietà microtessiturali delle arenarie

Al fine di valutare sperimentalmente le proprietà di scala della struttura dei pori in rocce sedimentarie,



FIG. 3 — Reticolo cristallino frattale ottenuto mediante il modello di nucleazione e crescita descritto (Ghilardi *et alii*, 1992b).

— Fractal crystal network obtained from the described nucleation and growth model.

abbiamo esaminato alcuni campioni di arenarie a diverso stadio di diagenizzazione analizzando superfici di frattura per mezzo di un microscopio elettronico a scansione (SEM). Indagini dello stesso tipo sono descritte in letteratura (Katz & Thompson, 1985 e Krhon, 1989) orientate essenzialmente alle proprietà geometriche relative al materiale di cementazione. I

risultati che presentiamo si riferiscono invece a proprietà di invarianza di scala che, misurate a minore ingrandimento e stando almeno alle prime elaborazioni sinora svolte, sono dovute all'assortimento granulometrico. Questo risultato, oltre a confermare quanto emerso dagli esperimenti numerici precedentemente descritti (Ghilardi *et alii*, in stampa), fornisce una in-

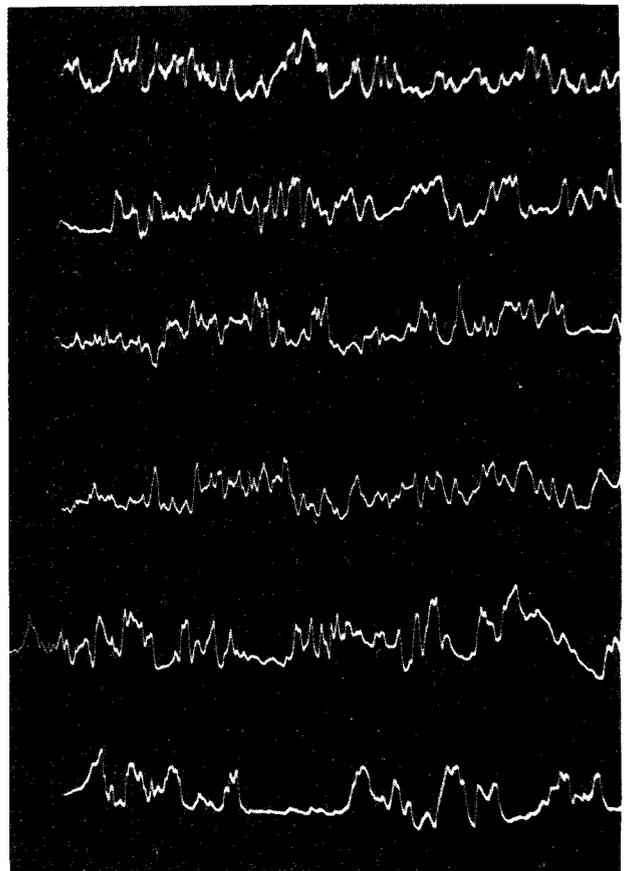
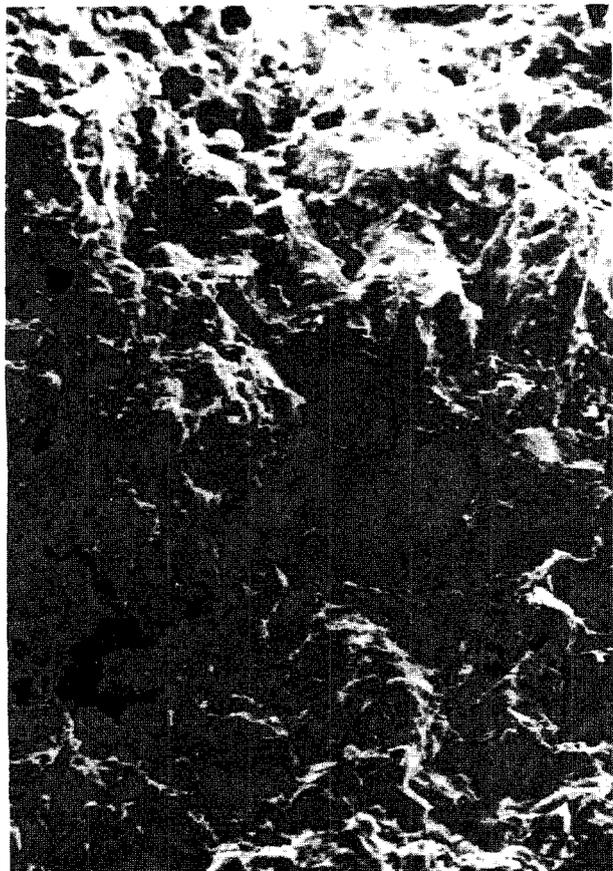


FIG. 4 — a) Immagine della superficie di un campione di arenaria ottenuta col SEM; b) segnale analogico prodotto dagli elettroni secondari.

— a) Sample surface image of sandstone sample obtained by SEM; b) analogical signal produced by secondary electrons.

dicazione importante sui processi morfogenetici della roccia. Parrebbe difatti che il processo di frammentazione della roccia madre risulti in effetti l'elemento dominante, rispetto al trasporto ed alla successiva sedimentazione e compattazione, nel determinare le caratteristiche tessiturali della roccia.

La metodologia da noi utilizzata è basata sulla analisi del segnale analogico prodotto dagli elettroni secondari provenienti dalla superficie del campione e catturati tramite il rivelatore Everhart-Thornley. La letteratura specifica (vedi, ad esempio il classico manuale di Goldstein & Yakowitz 1975) indica chiaramente che tale segnale è, tra quelli generamente forniti dal SEM, il più adatto dato a fornire informazioni relative alla topografia della superficie. Tra i picchi del segnale e quelli delle asperità superficiali esiste poi una forte correlazione che taluni autori (Katz & Thompson, 1985) ritengono addirittura assoluta.

La risoluzione spaziale del segnale dipende dall'ingrandimento utilizzato: aumentando progressivamente l'ingrandimento, si manifestano, via via, nuovi dettagli della superficie mentre scompaiono i precedenti la cui scala caratteristica è più alta. È possibile dimostrare che, se la superficie esaminata è frattale, il numero di picchi topografici P rilevati aumenta con la scala caratteristica λ della porzione di campione osservata ad un certo ingrandimento secondo la relazione

$$P(\lambda) \propto \lambda^{2-D} \quad (4)$$

Ad esempio, nella Fig. 5 è riportato il numero P di picchi rilevati per unità di lunghezza in funzione dell'ingrandimento utilizzato per uno dei campioni di arenaria esaminati. Nella figura, i punti sperimentali ben si allineano lungo una retta di equazione (4) per scale di lunghezza comprese fra 0,1 mm e 1 cm, e la dimensione frattale può essere stimata pari a $D=2,8$. Al di sotto di 0,1 mm, il numero di picchi per unità di lunghezza rimane costante e, dalla (4), la dimensione risulta $D=2,0$. In effetti, mentre i frattali teorici sono scala invarianti comunque li si osservi, l'invarianza di scala delle strutture naturali si mantiene soltanto per un intervallo finito di scale di osservazione

i cui estremi sono definiti dalla letteratura anglosassone come inner ed outer cutoffs.

Si può dunque concludere che la superficie presenta caratteristiche frattali per scale di osservazione maggiori di 0,1 mm, mentre al di sotto di tale limite la superficie diventa descrivibile con le metodologie della geometria Euclidea. Questo comportamento, assente negli oggetti frattali creati per via teorica dai matematici, è invece tipico degli oggetti frattali reperibili in natura.

Conclusioni

L'analisi dei processi scala invarianti in ingegneria, geologia e geofisica si sta rapidamente affermando come uno strumento di notevole efficacia ogni qualvolta sussista la necessità di descrivere in maniera sintetica la genesi di geometrie complesse. Nel presente lavoro abbiamo brevemente riassunto gli aspetti essenziali dell'attività di ricerca che stiamo da tempo svolgendo in questo settore. Oltre ai lavori già pubblicati abbiamo fatto cenno ai primi risultati di una ricerca teorica e sperimentale, attualmente in atto, che concerne la stima della conduttività idraulica e dei coefficienti di dispersività delle arenarie in relazione alle loro caratteristiche microtessiturali. L'indagine è frutto di una collaborazione tra il Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale e del Rilevamento del Politecnico di Milano, il Dipartimento di Scienze della Terra dell'Università di Firenze e il Dipartimento di Ingegneria Idraulica e Ambientale dell'Università di Pavia. La parte sperimentale concerne un esteso lavoro al microscopio elettronico a scansione ed è stata basata sull'analisi del segnale emesso dagli elettroni secondari di una serie di campioni di arenaria. Tale segnale, fortemente correlato con la topografia della superficie osservata, consente di indagarne le caratteristiche tessiturali. I primi risultati mostrano che le proprietà di scala, rilevate da altri autori a scale comprese tra i 10 Å e i 500 μ, ed attribuite sostanzialmente ai processi di litificazione della roccia, possono riscontrarsi a scale molto maggiori. I campioni da noi

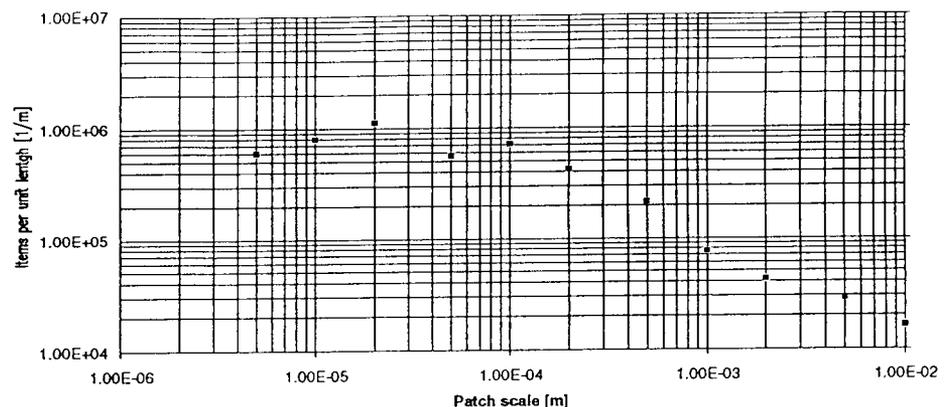


FIG. 5 — Numero di picchi per unità di lunghezza misurati a diversi ingrandimenti.

— Peak's number per unit length for different patch scale.

considerati hanno mostrato un comportamento frattale delle superfici esaminate alla scala, tra 100μ e 10000μ , che caratterizza i granuli della roccia madre. Tale osservazione, se confermata dalle ricerche in corso, potrebbe correlarsi ai processi frattali che, secon-

do ricerche recenti, governano la frantumazione, il trasporto e la successiva sedimentazione delle rocce. I risultati sono, tra l'altro, in perfetto accordo con il modello teorico (Ghilardi *et alii*, in stampa) già proposto dal nostro gruppo.

SUMMARY

Fractal geometry is a tool for characterizing objects occurring in nature. It differs from the Euclidean geometry because while euclidean objects are invariant under euclidean symmetry operation, the fractal objects are characterized by a dilation symmetry operation often referred to as self-similarity. Fractal shapes are scale-independent and self-similar.

One of the most important applications in geology of fractal analysis is the study of texture of sedimentary rocks, because the observed scaling behaviour of the porespace of these materials can be used to predict their flow characteristics. This is because the flow characteristics of porous media (in particular permeability and conductivity) depend upon the geometry of porespace.

At the molecular-size range, the surfaces of most materials are fractals that is surface geometric irregularities and defects are characteristically self-similar upon variation of resolution. Surface science has in the past tended to deal with the problem of description of geometrically irregular surfaces by treating irregularity as deviation from well defined Euclidean shapes. An entirely different approach is possible, if the surface is invariant over a certain range of scale transformations, that is if the surface is self-similar upon changes in resolution power.

The microstructure of sedimentary rocks, in particular some

sandstone samples, has been studied by using a Scanning Electron Microscope (SEM); in particular we measure fractal parameters on rock fracture surfaces utilizing the secondary-electron emission. The edge of a feature is defined to be a change in contrast in the secondary electron intensity, which results in a local maximum in intensity.

In the research the structure of scaling aggregates is investigated by using fractal geometry. To characterize particle aggregates such as loose granular soils, a fractal rock fragmentation model (Turcotte, 1986) is presented and the sedimentation of this mixture is modeled by using a ballistic algorithm (Ghilardi *et alii*, 1991). The fractal dimension D , characterizing the fragmentation process is preserved when an aggregate is formed, so D can be interpreted as the imprint of the process which produced that aggregate and it can help to determine porosity and hydraulic conductivity of some porous media.

Finally, a model able to reconstruct different moments of the lithification process by means of crystal nucleation and growth in pore space is described and some results are shown.

Manoscritto presentato il 28 ottobre 1992.

BIBLIOGRAFIA

- FEDER J. (1988) - Fractals. *Plenum Press*, New York.
- GHILARDI P. & MENDUNI G. (1991) - A Fractal Model for Soil Particle Aggregates. (Abstract) *European Geophysical Society, XVI General Assembly, Wiesbaden, 22-26 April 1991*.
- GHILARDI P., MENDUNI G. & ROSSO R. (1992a) - On the Morphogenesis of Scaling Porous Media. *Excerpta*, **6**: 207-227.
- GHILARDI P., KAIKAI A. & MENDUNI G. (1992b) Heterogeneity and Scaling Properties of Granular Porous Media. (Abstract) *Annales Geophysicae*, **10** (2).
- GHILARDI P., KAIKAI A. & MENDUNI G. - Self Similar Heterogeneity in Granular Porous Media at the REV Scale. *Water Resources Research*, in stampa.
- GOLDSTEIN J.I. & JAKOWITZ H. (eds.) (1975) - Practical Scanning Electron Microscopy. *Plenum Press*, New York.
- GUTENBERG B. & RICHTER C.F. (1954) - Seismicity of the Earth and Associated Phenomenon. *2nd Ed.*, *Princeton University Press*, Princeton.
- KATZ A.J. & THOMPSON A.H. (1985) - Fractal Sandstone Pores: Implications for Conductivity and Pore Formation. *Physical Review Letters*, **54** (12): 1325-1328.
- MANDELBROT B. (1982) - The Fractal Geometry of Nature. *Freeman*, San Francisco.
- MENDUNI G. (1990) - Alcune considerazioni sulla descrizione geometrica dei Mezzi Porosi: un Modello Frattale per gli Ammassi Granulari. *Atti XXII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Università della Calabria, Ottobre 1990*.
- MENDUNI G. (1990) - Geometric Characterization of Porous Media Heterogeneity by Fractal Approach. (Abstract) *EOS, Transactions AGU*, **17**.
- MENDUNI G. (1992a) - Invarianza di Scala nei Mezzi Porosi Naturali. in: Frattali & Ambiente. (A cura di R. Rosso) *Atti del Corso Frattali e Ambiente, organizzato dal CIRITA, Politecnico di Milano, 1992*.
- MENDUNI G. (1992b) - Proprietà Strutturali dei Mezzi Porosi: Morfogenesi ed Invarianza di Scala, *Seminario tenuto su invito al XIII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Firenze, 1992*.
- MULLER J. & MCCAULEY L. (1992) - Implication of Fractal Geometry for Fluid Flow Properties of Sedimentary Rocks. *Transactions in Porous Media*, **8**: 133-147.
- TURCOTTE D.L. (1986) - Fractal and Fragmentation. *J. Geophys. Res.*, **91**: 1921-1926.
- TURCOTTE D.L. (1992) - Fractal and Chaos in Geology and Geophysics. *Cambridge University Press*.
- WITTEN T.A. & SANDER L.M. (1981) - Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Phenomenon. *Physical Review Letters*, **47**: 1400-1432.
- WONG P., KOPLIK J. & TOMANIC P. (1984) - Conductivity and permeability of rocks. *Phys. Rev. B.*, **30** (11): 6606-6614.