

A. DI GERLANDO

Doppi bipoli e quadripoli
nelle reti a scala

L'Energia Elettrica N° 7-8 1989

A. DI GERLANDO (*)

Doppi bipoli e quadripoli nelle reti a scala

Sommario

I quadripoli ed i doppi bipoli sono componenti di frequente utilizzo nella modellistica di diverse categorie di circuiti e di reti, sia nell'ambito dell'energetica elettrica che dell'elettronica di segnale: tipici elementi a quattro morsetti sono i trasformatori, le linee, gli amplificatori, i filtri.

Tali componenti sono spesso connessi fra loro, con collegamenti in serie, in parallelo, in cascata o misti; la connessione può anche comprendere un numero elevato di componenti.

Nel presente lavoro si considera lo studio di doppi bipoli e di quadripoli di tipo lineare, tempo-invariante, privi di generatori indipendenti, nella connessione in cascata.

Si mostra come, per tale categoria di reti, dette reti a scala, le diverse tipologie di elementi a quattro terminali si riconducano al tipo con struttura a "T" e "C" (o ad esse speculari).

Nella ipotesi che gli elementi a quattro morsetti connessi in cascata siano ripetitivi, come struttura e valore dei parametri, si giunge ad una significativa semplificazione nel calcolo della matrice di trasmissione.

1. Premessa.

La modellistica delle reti contenenti quadripoli e doppi bipoli, molto vasta e sviluppata, è di frequente impiego in molte applicazioni dell'elettrotecnica, sia nell'ambito dell'energetica elettrica che dell'elettronica di segnale: tali dispositivi, classificabili in lineari e non lineari, tempo-varianti e tempo-invarianti, attivi e passivi, e diversamente costituiti al loro interno, sono caratterizzati dal presentare quattro morsetti.

Tipici elementi a quattro morsetti sono, ad esempio, le linee, i trasformatori, i filtri, gli amplificatori, gli attenuatori.

Spesso questi oggetti sono collegati fra di loro, ad esempio tramite connessioni in serie, in parallelo, o miste: usualmente nel collegamento è coinvolto un numero limitato di quadripoli; la connessione in cascata, tuttavia, può comprenderne un numero elevato.

Oggetto del presente lavoro è lo studio di elementi a quattro morsetti di tipo lineare, tempo-invariante e privi di generatori indipendenti, connessi in cascata (reti a scala): si mostra come diverse tipologie di elementi a quattro morsetti si possano ricondurre, in tale connessione, al tipo con configurazione "T" o "C" (o ad esse speculari): tale configurazione consente, nella ipotesi che gli elementi in cascata siano di tipo ripetitivo, una significativa semplificazione nel calcolo della matrice di trasmissione complessiva della rete a scala, nel caso di doppi bipoli ed in quello, più generale, di generici quadripoli.

2. Gli elementi a quattro morsetti nella connessione in cascata.

La principale utilità della teoria delle reti di quadripoli è che con essa è possibile legare analiticamente tensioni e correnti ai morsetti, senza far riferimento alle grandezze elettriche all'interno delle reti stesse.

Il funzionamento ai morsetti di un elemento a quattro terminazioni viene usualmente descritto tramite le grandezze elettriche misurate a due coppie di morsetti.

Date le ipotesi di linearità e tempo-invarianza assunte per caratterizzare in generale tale elemento, si fa riferimento, per quanto riguarda le grandezze elettriche ed i parametri circuitali, alle trasformate di Laplace ($V(s)$, $I(s)$, $Z(s)$, $Y(s)$).

Quando poi si consideri il funzionamento in regime alternato sinusoidale, le quantità suddette sono, come ben noto, fasori da calcolarsi per $s=j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$.

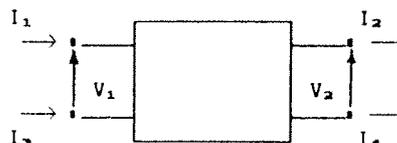


Fig.1 - Grandezze ai morsetti di un elemento a quattro morsetti.

Con riferimento alle grandezze di fig.1, la distinzione fra doppio bipolo e quadripolo è, come noto, legata alle seguenti relazioni:

(*) Ing. Antonino Di Gerlando, del Dipartimento di Elettrotecnica del Politecnico di Milano.

(2.1) $I_1 + I_3 \neq 0; I_2 + I_4 \neq 0$ (equaz. quadripolo);

(2.2) $I_1 + I_3 = 0; I_2 + I_4 = 0$ (equaz. doppio bipolo)

Il doppio bipolo costituisce dunque un caso particolare di quadripolo, per il quale è sufficiente conoscere due tensioni (V_1 e V_2) e due correnti (I_1 e I_2) per definirne il funzionamento; diversamente, per la caratterizzazione di un quadripolo si devono conoscere le correnti di tutti i quattro morsetti.

Nel seguito con il termine quadripolo si intenderà sempre un elemento lineare, tempo-invariante, passivo, eventualmente costituito da un doppio bipolo.

È noto che un doppio bipolo lineare passivo soddisfa al principio di reciprocità: il rapporto fra tensione di ingresso V_1 e corrente di uscita I_2 (rapporto definito impedenza di trasferimento) non cambia se le coppie di morsetti di ingresso e di uscita vengono scambiate fra di loro.

Si consideri il collegamento in cascata di N quadripoli uguali: si può mostrare che tale collegamento in cascata è, in generale, riconducibile alla cascata di $N-1$ quadripoli uguali del tipo a "C" (o C speculare), più un quadripolo del tipo a C con parametri diversi dai precedenti, più alcune impedenze od ammettenze di terminazione. Si riportano nel seguito alcune trasformazioni di reti a scala per i tipi di quadripolo elementare con struttura più frequente: tali trasformazioni di rete sono valide sia nel caso di doppi bipoli che nel caso generale di quadripoli.

a) Cascata di quadripoli a "T".

In fig.2a è mostrata la cascata di tre quadripoli a T.

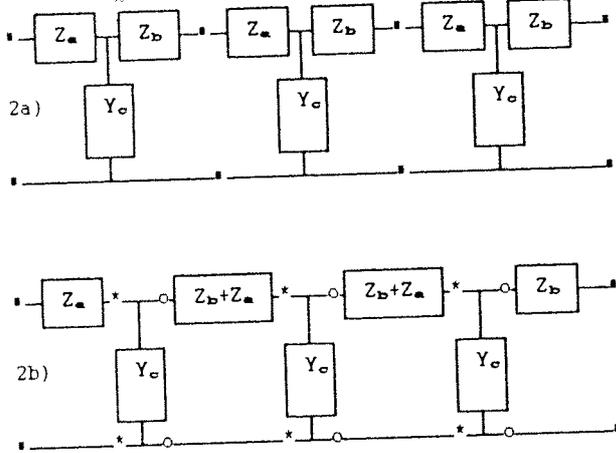


Fig.2 - Cascata di quadripoli a T e rete a scala equivalente.

La fig.2b evidenzia come la rete a scala si possa pensare così costituita:

- da una impedenza Z_a di ingresso, in cascata con tre quadripoli del tipo a "T", di cui due con impedenza serie $Z_a + Z_b$ ed uno con impedenza serie Z_b (morsetti contrassegnati con *);
- da un quadripolo a "T" speculare con impedenza serie Z_a , seguito da due quadripoli a "T" speculare (impedenza serie $Z_a + Z_b$), con in cascata una impedenza di uscita Z_b (morsetti contrassegnati con o).

b) Cascata di quadripoli a "π".

In fig.3a è rappresentata la cascata di tre quadripoli a "π".

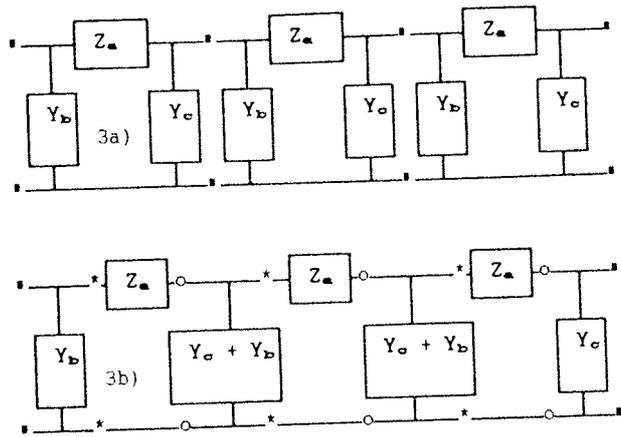


Fig.3 - Cascata di quadripoli a π e rete a scala equivalente.

La fig.3b mostra la trasformazione della rete originaria in una rete a scala costituita da tre quadripoli (due uguali ed uno con ammettenza derivata diversa): i quadripoli possono essere del tipo a Γ (morsetti o) o a Γ speculare (morsetti *); è inoltre presente una ammettenza derivata di estremità.

c) Cascata di quadripoli a "doppio T".

Si tratta di quadripoli simili a quelli a T, in cui sono però presenti due impedenze serie anche fra i morsetti inferiori. La fig.4.a mostra tre quadripoli a doppio T collegati in cascata.

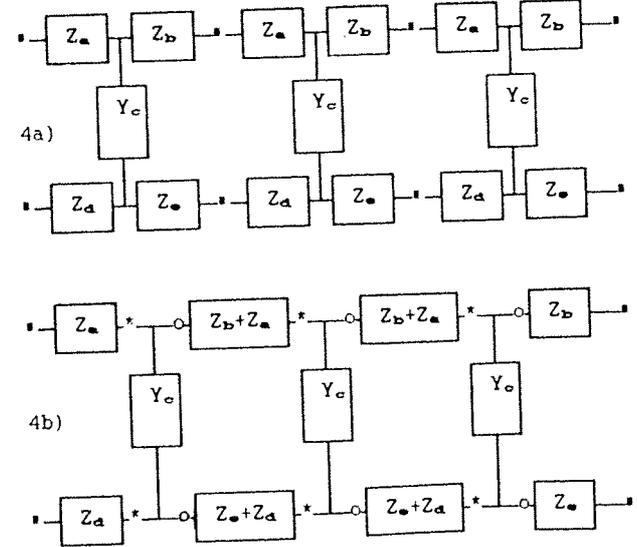


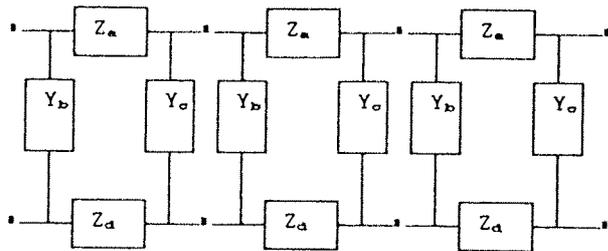
Fig.4 - Cascata di quadripoli a doppio T e rete a scala equivalente.

La trasformazione di fig.4b evidenzia che la rete a scala è equivalente alla cascata di due possibili diverse configurazioni:

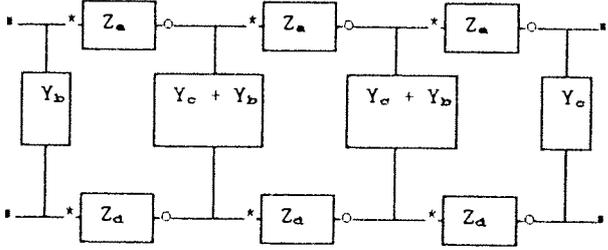
- due impedenze serie di ingresso più tre quadripoli del tipo a C, di cui quello estremo diverso da quelli intermedi (morsetti *);
- tre quadripoli del tipo a C speculare, seguiti da due impedenze serie di terminazione (morsetti o).

d) Cascata di quadripoli a "doppio π".

Questo tipo di quadripolo è assimilabile a quello a π, cui si aggiunge una impedenza serie fra i morsetti inferiori (fig.5a).



5a)



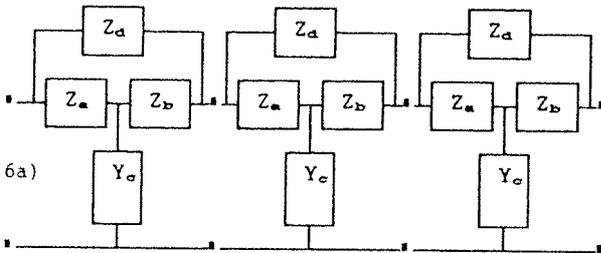
5b)

Fig.5 - Cascata di quadripoli a doppio π e rete a scala equivalente.

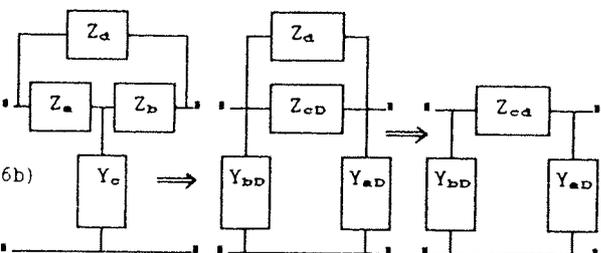
La trasformazione mostra ancora la riduzione ad una rete a scala costituita dalla cascata di quadripoli a C (morsetti o) oppure a C speculare (morsetti *), più una ammettenza, rispettivamente finale o iniziale, di terminazione.

e) Cascata di quadripoli a "T" con impedenza ponte.

Si tratta di quadripoli a T, cui è aggiunta una impedenza serie, in connessione diretta tra i due morsetti superiori (fig.6).



6a)



6b)

Fig.6 - Cascata di quadripoli a T con impedenza ponte, e trasformazione di un singolo quadripolo in un quadripolo a π .

La fig.6b mostra come questa situazione si possa ricondurre ad una delle precedenti: con riferimento al singolo quadripolo, la trasformazione stella-triangolo ed il successivo parallelo delle impedenze serie riconduce il quadripolo stesso al tipo a π , già considerato nel caso b).

f) Cascata di quadripoli a "parallelo di T".

Si tratta di quadripoli a T connessi in parallelo ai terminali di ingresso e di uscita: in fig.7, a sinistra, è riportato un esempio.

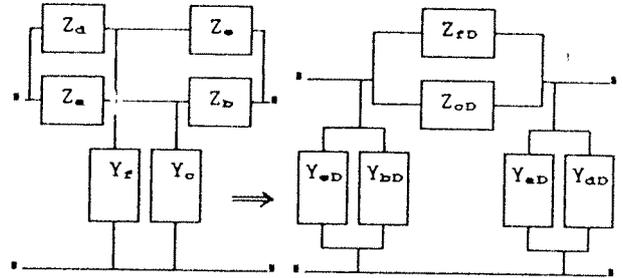


Fig.7 - Trasformazione di un quadripolo a "parallelo di T".

Anche in questo caso è possibile ricondursi ad una situazione già esaminata, con la trasformazione di fig.7: le due stelle (abc, def) vengono ricondotte separatamente a triangoli, i cui lati vanno a costituire i lati di un circuito a π (caso b)).

I casi di trasformazione precedentemente esaminati hanno mostrato come ricondursi a quadripoli del tipo a T o a C: d'altra parte un quadripolo a T costituisce un caso particolare di quadripolo a C, avente impedenza serie inferiore di valore nullo.

Si conclude quindi che lo studio ai morsetti di estremità di una cascata di quadripoli uguali di tipo qualsiasi può essere riportato, a meno di singolarità terminali, allo studio di una cascata di quadripoli uguali del tipo a C.

3. Le equazioni dei quadripoli a "C" nella connessione in cascata.

Nel seguito si considerano le equazioni degli elementi a quattro morsetti del tipo a C, connessi in cascata: si mostrerà che la matrice di trasmissione complessiva, relativa ai morsetti terminali, si può esprimere, mediante opportuni coefficienti, come funzione lineare della matrice di trasmissione di un singolo elemento a quattro morsetti.

Vengono esaminati i quattro casi corrispondenti a doppio bipolo e quadripolo del tipo a C, nella disposizione speculare e non.

3.1 Doppio bipolo del tipo a C.

Il legame tra grandezze di ingresso e di uscita, con riferimento alle convenzioni di misura di fig.8, è esprimibile mediante l'impiego della matrice di trasmissione [W]:

$$(3.1) \quad [V_1 \ I_1]^T = [W] \cdot [V_2 \ I_2]^T$$

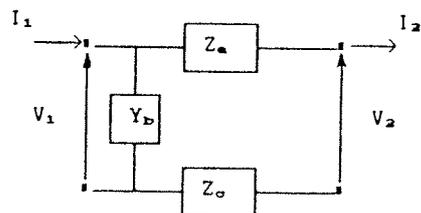


Fig.8 - Doppio bipolo del tipo a C.

Più esplicitamente, si può scrivere:

$$(3.2) \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (Z_{\alpha\sigma}) \\ Y_b & (1 + \sigma) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

dove si è posto: $Z_{\alpha\sigma} = Z_\alpha + Z_\sigma$; $\sigma = Z_{\alpha\sigma} \cdot Y_b$.

Secondo il principio di reciprocità, si ha che il determinante della matrice di trasferimento, $\det [W]$, è uguale ad 1.

Nel caso di una rete a scala, costituita da k doppi bipoli uguali a quello di fig.8, il legame fra grandezze ai morsetti di ingresso e di uscita diviene il seguente:

$$(3.3) \quad [V_1 \ I_1]^T = [W]^k \cdot [V_2 \ I_2]^T$$

E' utile esaminare nel dettaglio la matrice di trasmissione $[W]^k$. Tale matrice può, naturalmente, calcolarsi come prodotto delle k singole matrici $[W]$: tuttavia questa procedura è alquanto laboriosa, specialmente se k è elevato, e soprattutto non tiene conto delle caratteristiche ripetitive della catena.

Si ottiene una procedura di calcolo più conveniente se si considera dapprima il caso di $k=2$, per il quale si ha:

$$(3.4) \quad [W]^2 = \begin{bmatrix} (1+\sigma) & ((2+\sigma) \cdot Z_{\alpha\sigma}) \\ ((2+\sigma) \cdot Y_b) & (\sigma + (1+\sigma)^2) \end{bmatrix}$$

Questa espressione non mette però in evidenza una importante proprietà della matrice $[W]^2$: tale proprietà, deducibile dalla stessa (3.4), è espressa dalla (3.5):

$$(3.5) \quad [W]^2 = (2+\sigma) \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_{\alpha\sigma} \\ Y_b & 1+\sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cioè, sinteticamente:

$$(3.6) \quad [W]^2 = \alpha \cdot [W] - [U]$$

con $\alpha = 2+\sigma$; $[U]$ è la matrice unità.

La (3.6) conduce ad una importante considerazione: poichè la potenza k-esima della matrice $[W]$ può essere calcolata come prodotto di $k/2$ matrici $[W]^2$ (a meno di una matrice $[W]$ nel caso di k dispari), l'applicazione successiva della (3.6) consente di esprimere la matrice $[W]^k$ come funzione lineare della matrice $[W]$, secondo una legge del tipo:

$$(3.7) \quad [W]^k = p(k) \cdot [W] + q(k) \cdot [U]$$

La determinazione dei coefficienti $p(k)$ e $q(k)$ si può effettuare nel seguente modo: si suppongano noti i loro valori, e si vogliano determinare $p(k+1)$ e $q(k+1)$. Dal calcolo della potenza di ordine $k+1$ della matrice, con l'uso delle (3.6), (3.7) si ricava, per confronto dei coefficienti:

$$(3.8) \quad p(k+1) = \alpha \cdot p(k) - q(k) ; \quad q(k+1) = p(k)$$

Con semplici trasformazioni, le (3.7), (3.8) possono essere convenientemente riassunte con le seguenti formule:

$$(3.9) \quad [W]^k = \begin{bmatrix} w_1(x) & w_2(x) \\ w_3(x) & w_4(x) \end{bmatrix} = p(x) \cdot [W] + (p(x+1) - \alpha \cdot p(x)) \cdot [U]$$

$$(3.10) \quad p(k+2) = \alpha \cdot p(k+1) - p(k) \quad k \geq 0 ; \\ p(0)=0; \quad p(1)=1$$

Come si può osservare, le (3.9), (3.10) includono anche i seguenti casi particolari:

- a) $x=0$: $[W]^0 = [U]$, da cui: $V_1=V_2$ e $I_1=I_2$. Questa situazione corrisponde ad un doppio bipolo nullo (avente cioè $Z_\alpha=Z_\sigma=0$ e $Y_b=0$);
- b) $x=1$: doppio bipolo complessivo costituito da un unico doppio bipolo elementare.

In definitiva, il calcolo della potenza x-esima della matrice $[W]$ richiede la determinazione dei coefficienti $p(x)$ e $p(x+1)$: tale determinazione si può effettuare applicando ricorsivamente la (3.10) fino ad un valore dell'indice pari a: $k = x-1$.

3.2 Doppio bipolo del tipo a C speculare.

Il legame tra grandezze di ingresso e di uscita, con riferimento alle convenzioni di misura di fig.9, è esprimibile mediante l'impiego di un'altra matrice di trasmissione, indicata con $[M]$:

$$(3.11) \quad [V_1 \ I_1]^T = [M] \cdot [V_2 \ I_2]^T$$

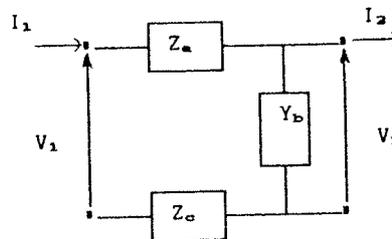


Fig.9 - Doppio bipolo del tipo a C speculare.

Più esplicitamente, si può scrivere:

$$(3.12) \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \sigma) & (Z_{\alpha\sigma}) \\ Y_b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Il confronto della (3.12) con la (3.2) evidenzia un legame tra le matrici di trasmissione $[W]$ e $[M]$: tale legame ha una precisa formulazione matematica, nella ipotesi di misurare le grandezze elettriche ai morsetti di uscita con la stessa convenzione di quelle di ingresso (convenzione degli utilizzatori).

In tal caso nelle matrici di connessione delle due porte cambiano alcuni segni; precisamente, indicando con $[W']$ e $[M']$ queste nuove matrici, si ha:

$$(3.13) \quad [W'] = \begin{bmatrix} 1 & -(Z_{\alpha\sigma}) \\ Y_b & -(1 + \sigma) \end{bmatrix} ; \\ [M'] = \begin{bmatrix} (1 + \sigma) & -(Z_{\alpha\sigma}) \\ Y_b & -1 \end{bmatrix}$$

E' evidentemente:

$$(3.14) \quad [M'] = [W']^{-1}$$

Il significato della (3.14) è chiaro se si considera che i morsetti di uscita del doppio bipolo a

C possono essere visti come morsetti di ingresso del doppio bipolo a C speculare: in tal modo, pur di adottare convenzioni simmetriche per le due porte, la (3.12) è deducibile dalla (3.2) per inversione della [W].

Anche per il doppio bipolo a C speculare connesso in cascata in una rete a scala, si può svolgere una trattazione simile a quella svolta nel Parag. 3.1. e si ottengono le medesime espressioni ivi riportate: in particolare, rimangono valide le (3.6)+(3.10), pur di sostituire la matrice [M] alla [W].

3.3 Quadripolo del tipo a C.

In questo caso, pur facendo ancora riferimento a "morsetti di ingresso e di uscita", non è più utilizzabile la nozione di porta, in quanto vale la (2.1) (cfr. fig.1).

Si riconosce, però, dalla applicazione della legge delle correnti all'insieme di taglio definito dai quattro terminali del quadripolo, che fra correnti di ingresso e di uscita esiste la seguente relazione:

$$(3.15) \quad I = I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

Con riferimento alle convenzioni di fig.1, la corrente I assume dunque il significato di corrente che fluisce "globalmente" fra ingresso ed uscita del quadripolo.

Per la situazione di fig.8 (nella quale si considerino anche le correnti I₃ e I₄, secondo le convenzioni di fig.1) con qualche elaborazione si ottiene il legame fra grandezze di ingresso e di uscita:

$$(3.16) \quad [V_1 \ I_1]^T = [W] \cdot [V_2 \ I_2]^T - [H] \cdot I$$

con [H] = [Z_c \ τ]^T, dove τ = Z_c · Y_b

Da questa relazione si nota che le equazioni di un quadripolo del tipo a C differiscono da quelle del corrispondente doppio bipolo per la presenza del vettore aggiuntivo [H]·I: la (3.16) si riduce alla (3.1) nei seguenti casi particolari:

- I=0 (condizione del doppio bipolo);
- Z_c=0 (condizione cui corrisponde un circuito a Γ).

Il legame fra grandezze di ingresso e di uscita del collegamento in cascata di quadripoli uguali del tipo a C può essere così ottenuto: considerata la validità delle (3.15) per le correnti ai morsetti di ingresso e di uscita della rete a scala, si combinano fra loro tante equazioni del tipo (3.16) quanti sono i quadripoli in connessione. La espressione finale si deduce facilmente con un procedimento per induzione: ad esempio, nel caso di 2 quadripoli in cascata si ha:

$$[V_1 \ I_1]^T = [W]^2 \cdot [V_2 \ I_2]^T - ([W]+[U]) \cdot [H] \cdot I;$$

con tre quadripoli, con le opportune elaborazioni, si ottiene:

$$[V_1 \ I_1]^T = [W]^3 \cdot [V_2 \ I_2]^T - ([W]^2+[W]+[U]) \cdot [H] \cdot I$$

Per una cascata di k quadripoli l'espressione del legame ingresso-uscita è la seguente:

$$(3.17) \quad [V_1 \ I_1]^T = [W]^k \cdot [V_2 \ I_2]^T - [H(k)] \cdot I$$

$$\text{con } [H(k)] = \begin{bmatrix} h_1(k) \\ h_2(k) \end{bmatrix} = \left(\sum_{n=0}^{k-1} [W]^n \right) \cdot [H]$$

Ulteriori elaborazioni della (3.17) conducono ad una forma più esplicita del suddetto legame:

$$(3.18) \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(k) \cdot [W] + (p(k+1) - \alpha \cdot p(k)) \cdot [U] \\ \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \left[\sum_{n=0}^k p(n) - p(k) \right] \cdot [W] - \left\{ (\alpha - 1) \cdot \sum_{n=0}^k p(n) - \alpha \cdot p(k) \right\} \cdot [U] \cdot [H] \cdot I$$

Si può notare come la (3.18) sia valida anche nel caso particolare di quadripolo nullo (k=0), caso che si verifica per Z_a=Z_c=Y_b=0.

3.4 Quadripolo del tipo a C speculare.

La trattazione è analoga a quella svolta nel paragrafo precedente: si fa riferimento al quadripolo di fig.9, dove vanno considerate anche le correnti I₃ e I₄, con le convenzioni di fig.1. Ancora mediante la (3.15), il legame ingresso-uscita per un singolo quadripolo assume la seguente espressione:

$$(3.19) \quad [V_1 \ I_1]^T = [M] \cdot [V_2 \ I_2]^T - [F] \cdot I$$

con [F] = [Z_c \ 0]^T

Anche per questo quadripolo valgono le considerazioni già evidenziate per quello del tipo a C: il suo legame ingresso-uscita si riduce a quello del corrispondente doppio bipolo sia per I=0, che per Z_c=0 (quadripolo a Γ speculare).

Per quanto riguarda il legame ingresso-uscita di una catena di quadripoli uguali del tipo a C speculare, è facilmente verificata la validità delle (3.17) e (3.18), pur di sostituire [M] e [F], rispettivamente a [W] e [H].

4. Applicazioni.

Le relazioni precedentemente illustrate sono di utile impiego quando si voglia studiare, nella loro globalità, reti contenenti cascate di doppi bipoli o quadripoli uguali fra loro: infatti in tal modo è possibile giungere ad espressioni in forma chiusa delle quantità di interesse.

Un semplice esempio di applicazione è costituito dal calcolo della ammettenza ai morsetti di bipoli del tipo di fig.10.

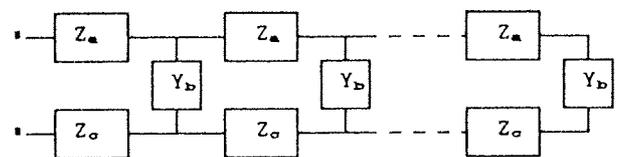


Fig.10 - Bipolo con elementi serie e parallelo connessi a scala.

La formula di calcolo usualmente adottata è quella che fa uso della espansione in frazioni continue: essa mostra, in termini di impedenza, la seguente struttura:

$$(4.1) \quad Z_c = Z_{ac} + \frac{1}{Y_b + \frac{1}{Z_{ac} + \frac{1}{Y_b + \dots}}}$$

$$+ \frac{1}{Z_{ac} + 1/Y_b}$$

La (4.1) si presenta di scomodo impiego. Considerando invece il suddetto bipolo come costituito dalla cascata di k doppi bipoli del tipo a C speculare, di cui l'ultimo doppio bipolo con porta secondaria a vuoto ($I_2=0$), l'uso delle espressioni precedenti, (3.11) e (3.12), conduce a:

$$(4.2) \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1(k) & m_2(k) \\ m_3(k) & m_4(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Infine, con qualche elaborazione si ottiene:

$$(4.3) \quad Y_c = I_1/V_1 = Y_b \cdot p(k) / [p(k+1) - p(k)]$$

dove p è da calcolarsi mediante la (3.10).

In modo analogo si possono ricavare utili espressioni sintetiche delle grandezze ai morsetti per diverse altre situazioni circuitali.

A titolo di esempio si mostra lo studio di una rete più complessa (fig.11), in cui siano presenti contemporaneamente cascate di doppi bipoli e di quadripoli: si tratta di una rete a scala, alimentata da un generatore ideale di corrente I , così disposto: un terminale è connesso al morsetto superiore di ingresso della rete, mentre l'altro può essere collegato ad uno qualsiasi dei morsetti inferiori dei singoli quadripoli elementari. Si deve peraltro osservare che la presenza di un generatore di corrente nella rete non ne limita la generalità: il generatore può, infatti, rappresentare, grazie al teorema di sostituzione, un qualunque bipolo, purchè ne simuli fedelmente la forma d'onda di corrente.

La rete proposta può costituire il circuito equivalente per diverse situazioni circuitali: nel caso specifico, l'applicazione per la quale tale circuito è stato analizzato è lo studio della distribuzione delle correnti e delle perdite fra le varie unità di un sistema di conversione c.a.-c.c.: in tale disposizione, tipicamente adottata nella realizzazione degli armadi contenenti convertitori statici [6], le unità di conversione, rappresentate dai parametri derivati Y_b , sono connesse in cascata, e il generatore di corrente simula il carico.

La medesima struttura circuitale equivalente corrisponde anche alla configurazione di possibili sistemi innovativi per la alimentazione delle linee di contatto per trazione, ad esempio metropolitana [7]: in questo caso il carico, costituito dal convoglio, è mobile ed il suo spostamento lungo il sistema è simulato, nel modello, considerando diverse posizioni di connessione del morsetto inferiore del generatore di corrente equivalente.

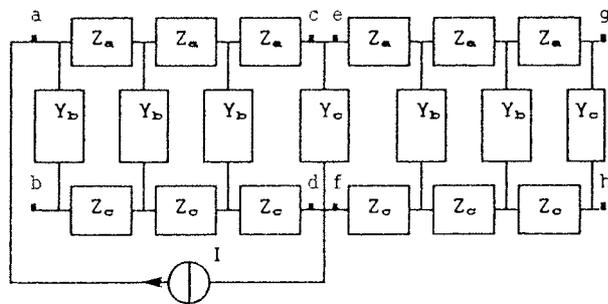


Fig.11. - Rete a scala di doppi bipoli e quadripoli

Non si vuole qui entrare nel merito dell'analisi di un tale sistema di conversione, in particolare per quanto riguarda il ruolo svolto dalle valvole,

l'effetto dei parametri resistivi ed induttivi presenti nei parametri serie e derivati, perchè tale analisi è oggetto di uno studio separato [8]. E' invece interessante mostrare la metodologia di risoluzione di un tale tipo di rete, con l'uso delle equazioni di doppi bipoli e quadripoli.

E' evidente la possibilità di utilizzare, anche in un caso come questo, i metodi classici di analisi delle reti: tuttavia, soprattutto se la rete a scala contiene un numero elevato di elementi a quattro morsetti, questi metodi possono risultare di impiego oneroso.

In effetti nella rete di fig.11 è utile mettere in evidenza alcune coppie di morsetti, rispetto alle quali si possono individuare opportune sottoreti: le coppie di morsetti a-b, c-d costituiscono l'ingresso e l'uscita di una cascata di quadripoli del tipo a C; analogamente, le coppie di morsetti e-f, g-h definiscono una cascata di doppi bipoli del tipo a C speculare.

Lo studio può dunque essere distinto in due successive fasi:

- calcolo delle grandezze elettriche ai terminali degli elementi "globali" a quattro morsetti (sottoreti quadripolari);
- valutazione delle altre quantità interne alle sottoreti.

Questa procedura presenta l'evidente vantaggio di limitare i calcoli alla sola prima fase, se le quantità di interesse sono solo quelle ai morsetti globali.

Il circuito equivalente da considerare nella prima fase è quello di fig.12.

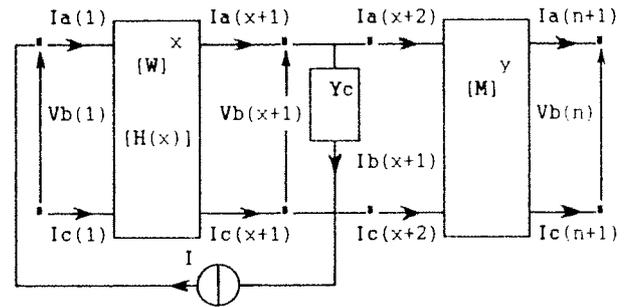


Fig.12 - Rete equivalente globale della rete di Fig.11.

Le equazioni di funzionamento di questa rete sono le seguenti:

$$\begin{cases} I_a(1) = I \\ \begin{bmatrix} V_b(1) \\ I_a(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(x) & w_2(x) \\ w_3(x) & w_4(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_b(x+1) \\ I_a(x+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} \cdot I \\ I_b(x+1) = Y_b \cdot V_b(x+1) \\ I_a(x+1) = I_b(x+1) + I_a(x+2) \\ \begin{bmatrix} V_b(x+1) \\ I_a(x+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1(y) & m_2(y) \\ m_3(y) & m_4(y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_b(n) \\ I_a(n+1) \end{bmatrix} \\ I_a(n+1) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Nel caso interessino anche le correnti ai morsetti inferiori, alle (4.4) vanno aggiunte le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} I_c(1) &= 0 & ; & \quad I_c(x+1) = I - I_a(x+1) \\ I_c(x+2) &= - I_a(x+2) & ; & \quad I_c(n+1) = 0 \end{aligned}$$

In merito ai pedici utilizzati per tensioni e correnti della rete di fig.12 si deve osservare che mentre $V_b(z)$ e $I_b(z)$ corrispondono a tensione e corrente effettive ai morsetti dell'ammettenza Y_b in posizione "z" generica, le correnti con indice "a" e "c" sono le correnti ai morsetti degli elementi a quattro morsetti, e solo per alcuni di tali elementi coincidono con quelle effettivamente circolanti nelle impedenze Z_a e Z_b . Detto n il numero complessivo di bipoli derivati (Y_b), x ed y rispettivamente il numero di quadripoli e di doppi bipoli elementari presenti, vale la seguente relazione:

$$(4.5) \quad n = x + y + 1 \quad ; \quad \text{con } x \geq 0 \text{ ed } y \geq 0$$

La condizione " $x = 0$ " significa che il generatore equivalente è connesso direttamente ai morsetti di ingresso della rete a scala; la condizione " $y = 0$ " corrisponde ad avere collegato il terminale mobile del generatore al morsetto inferiore all'estremità destra della rete.

Considerando che la prima e l'ultima equazione delle (4.4) sono già risolte, le quantità incognite sono: $V_b(1)$, $V_b(x+1)$, $V_b(n)$, $I_a(x+1)$, $I_b(x+1)$, $I_a(x+2)$; manipolando le equazioni si ottiene:

$$I_b(x+1) = \frac{1 + h_2(x)}{w_3(x) \cdot Z_b + w_4(x) \cdot (1 + Z_b \cdot m_3(y) / m_1(y))} \cdot I$$

$$I_a(x+1) = (1 + Z_b \cdot m_3(y) / m_1(y)) \cdot I_b(x+1)$$

$$I_a(x+2) = (Z_b \cdot m_3(y) / m_1(y)) \cdot I_b(x+1)$$

$$V_b(x+1) = Z_b \cdot I_b(x+1) \tag{4.6}$$

$$V_b(1) = \left[(w_1(x) + w_2(x) \cdot m_3(y) / m_1(y)) \cdot Z_b + w_2(x) \right] \cdot I_b(x+1) - h_1(x) \cdot I$$

$$V_b(n) = (Z_b / m_1(y)) \cdot I$$

E' evidente la validità delle (4.6) in tutte le situazioni parametriche, eccetto quella corrispondente a $Y_b=0$ ($Z_b=\infty$): peraltro una tale situazione renderebbe la risoluzione della rete del tutto banale, non giustificando la metodologia adottata. Le (4.6) non sono, tuttavia, utilizzabili direttamente, in quanto devono essere ancora esplicitate le quantità $w_j(z)$, $m_j(z)$, $h_j(z)$ in funzione di α , p , Z_a , Z_c , Y_b .

Dalla applicazione delle (3.9), (3.10), (3.17) si ottiene:

$$h_1(z) = p(z) \cdot Z_c$$

$$h_2(z) = \sum_0^z p(t) \cdot Z_c \cdot Y_b$$

$$(4.7) \quad w_1(z) = m_4(z) = (1 - \alpha) \cdot p(z) + p(z+1)$$

$$w_2(z) = m_2(z) = p(z) \cdot Z_{ac}$$

$$w_3(z) = m_3(z) = p(z) \cdot Y_b$$

$$w_4(z) = m_1(z) = p(z+1) - p(z)$$

Le ultime quattro relazioni delle (4.7) mettono in evidenza che la matrice $[W]^z$ si ottiene dalla $[M]^z$ con una operazione di trasposizione rispetto alla diagonale secondaria, in accordo a quanto già osservato per le (3.13) e (3.14).

Mediante l'uso delle (4.7) è possibile esplicitare le (4.6):

$$I_b(x+1) = \left[1 + \sum_0^x p(t) \right] \cdot Z_c \cdot Y_b \cdot \frac{[p(y+1) - p(y)] \cdot I}{p(x+1) \cdot p(y+1) - p(x) \cdot p(y)}$$

$$I_a(x+1) = I_b(x+1) \cdot \frac{p(y+1)}{p(y+1) - p(y)}$$

(4.8)

$$I_a(x+2) = I_b(x+1) \cdot \frac{p(y)}{p(y+1) - p(y)}$$

$$V_b(x+1) = Z_b \cdot I_b(x+1)$$

$$V_b(n) = I_b(x+1) \cdot \frac{Z_b}{p(y+1) - p(y)}$$

Le (4.8) mostrano che tutte le quantità di interesse possono essere espresse in funzione della corrente del generatore equivalente (I) e della corrente nel ramo derivato di posto $x+1$ ($I_b(x+1)$).

La conoscenza della tensione $V_b(n)$ ai morsetti di uscita del doppio bipolo, della tensione $V_b(x+1)$ e della corrente $I_a(x+1)$ ai morsetti di uscita del quadripolo consentono ora il calcolo di qualunque quantità interna alle sottoreti quadripolari di doppi bipoli e quadripoli.

Per quanto riguarda la sottorete di doppi bipoli, con riferimento ad una qualunque porta intermedia di ingresso, vale il seguente legame ingresso-uscita:

$$\begin{bmatrix} V_b(j) \\ I_a(j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1(n-j) & m_2(n-j) \\ m_3(n-j) & m_4(n-j) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_b(n) \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $x+1 \leq j \leq n$.

Con qualche elaborazione si ottengono tensioni e correnti relativi ai morsetti di ciascun doppio bipolo elementare:

$$V_b(j) = Z_b \cdot I_b(x+1) \cdot \frac{p(n-j+1) - p(n-j)}{p(y+1) - p(y)}$$

(4.9)

$$I_b(j) = V_b(j) \cdot Y_b$$

$$x+1 \leq j \leq n$$

$$I_a(j) = I_b(x+1) \cdot \frac{p(n-j+1)}{p(y+1) - p(y)}$$

Analogamente si ottengono le grandezze elettriche interne alla sottorete quadripolare di quadripoli. L'equazione del quadripolo avente come morsetti di ingresso quelli contrassegnati dall'indice j è la seguente:

$$\begin{bmatrix} V_b(j) \\ I_a(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(x-j+1) & w_2(x-j+1) \\ w_3(x-j+1) & w_4(x-j+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_b(x+1) \\ I_a(x+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(x-j+1) \\ h_2(x-j+1) \end{bmatrix} \cdot I, \quad \text{con } 1 \leq j \leq x+1$$

da cui si ottiene:

$$I_b(j) = I_b(x+1) \cdot \frac{p(x-j+2) - p(x-j+1)}{p(y+1) - p(y)}$$

$$\left[\frac{p(y+1) - (\alpha \cdot 1) \cdot p(y)}{p(y+1) - p(y)} \cdot I_b(x+1) + Z_c \cdot Y_b \cdot I \right]$$

$$V_b(j) = Z_b \cdot I_b(j)$$

$$1 \leq j \leq x+1$$

(4.10)

$$I_a(j) = I_b(x+1) \cdot \frac{p(x-j+2) \cdot p(y+1) - p(x-j+1) \cdot p(y)}{p(y+1) - p(y)} +$$

$$- \left(\sum_{t=0}^{x-j+1} p(t) \right) \cdot Z_c \cdot Y_b \cdot I$$

Le (4.9) e (4.10) consentono il calcolo delle tensioni e delle correnti in tutti i rami della rete considerata.

Qualora si considerino grandezze e parametri elettrici nel dominio della trasformata di Laplace, tali espressioni consentono, in linea di principio, il calcolo in forma chiusa; si deve peraltro osservare che, anche in relazione alla struttura delle Z_a , Y_b , Z_c , tali elaborazioni possono divenire pesanti.

Quando invece si studia una rete di questo tipo in regime alternato sinusoidale o in corrente continua, si riconosce come le suddette espressioni siano utili sotto l'aspetto dell'elaborazione numerica, soprattutto se confrontate con le procedure classiche di risoluzione delle reti.

In termini generali, la soluzione della rete considerata conduce alle seguenti conclusioni qualitative:

- i rami derivati "b" sono tanto più "in parallelo" fra di loro quanto più è elevato Y_b e bassi Z_a e Z_c ;
- i rami derivati percorsi dalla corrente di ampiezza maggiore sono quelli connessi ai morsetti del generatore equivalente (morsetti 1 e $x+1$);
- l'ampiezza delle correnti negli altri rami derivati diminuisce allontanandosi dai punti di connessione al generatore, con un tasso di diminuzione tanto maggiore quanto minore è la condizione di parallelismo dei rami derivati; tale ampiezza, nei rami derivati più lontani, può raggiungere livelli del tutto evanescenti;
- dal punto di vista del calcolo, mentre l'uso delle (4.9) non implica alcun problema di convergenza numerica, le (4.10) possono presentare alcune difficoltà di impiego: infatti nelle (4.10) compare una operazione differenza fra termini che, in alcuni casi, possono essere di ampiezza rilevante e di entità poco diversa; soprattutto se la rete a scala è molto estesa, può essere consigliabile l'effettuazione di calcoli in doppia precisione.

Dal punto di vista energetico, con riferimento ai fasori in regime sinusoidale, valgono le considerazioni nel seguito riportate.

Nel caso di doppio bipolo, si può fare riferimento alle potenze alle due porte, per cui, indicato con I_k il coniugato del fasore I_k , la potenza apparente localizzata in un generico doppio bipolo vale:

$$(4.11) \quad A = V_1 \cdot I_1 - V_2 \cdot I_2$$

E' chiaro che la medesima espressione (4.11) è applicabile anche alle grandezze alle due porte di una sottorete quadripolare di doppi bipoli.

Per un quadripolo, considerando il tipo a C, con le convenzioni di fig. 1, la potenza apparente localizzata nel generico quadripolo è pari a:

$$(4.12) \quad A = V_1 \cdot I_1 - V_2 \cdot I_2 + Z_c \cdot I \cdot (I - I_2)$$

Si osserva la presenza di un termine aggiuntivo

rispetto alla (4.11), dovuto alla corrente I ed alla impedenza serie inferiore Z_c . A causa della presenza di questo termine ulteriore, l'espressione della potenza di k quadripoli in cascata contiene, oltre alla differenza fra le potenze di ingresso e di uscita, una sommatoria di termini:

$$(4.13) \quad A = V_1 \cdot I_1 - V_{k+1} \cdot I_{k+1} + k \cdot Z_c \cdot I \cdot I - Z_c \cdot I \cdot \left(\sum_{t=1}^k I_{t+1} \right)$$

con $k \geq 1$.

Tenute presenti le (4.11) e (4.13), la potenza apparente complessiva, fornita alla rete considerata in fig.11 dal generatore di corrente equivalente, ha la seguente espressione:

$$A = V_b(1) \cdot I - V_b(x+1) \cdot I_b(x+1) +$$

$$+ (x+1) \cdot Z_c \cdot I \cdot I - Z_c \cdot I \cdot \left(\sum_{t=0}^x I_a(t+1) \right), \quad \text{con } x \geq 0 \quad (4.13)$$

5. Conclusioni.

L'impiego delle equazioni dei doppi bipoli e quadripoli assume particolare significato ed utilità quando si considerino reti costituite dal collegamento in cascata di numerosi elementi a quattro morsetti. Per le più diffuse tipologie di elementi a quattro morsetti di tipo lineare, tempo-invariante, privi di generatori indipendenti, collegati in cascata, è possibile ricondursi ad una rete a scala costituita, in generale, da elementi a quattro morsetti del tipo a C (o a C speculare), più alcuni bipoli di estremità.

Si è mostrato che nel caso di reti a scala costituite da elementi a quattro morsetti uguali fra loro, le matrici di trasmissione fra grandezze di ingresso alla rete e grandezze di uscita sono esprimibili come funzioni lineari delle matrici di un singolo elemento a quattro morsetti, sia nel caso di doppio bipolo che di quadripolo.

Quando si voglia studiare una rete in cui siano presenti sotto-reti aventi struttura a scala, l'impiego delle equazioni ingresso-uscita complessive delle sotto-reti può risultare utile: ciò consente, infatti, di suddividere la soluzione della rete in due fasi successive: nella prima fase si calcolano le sole quantità ai morsetti delle sotto-reti; nella seconda fase si valutano, se necessario, tutte le altre quantità, interne alle sotto-reti; questa procedura, a differenza dei metodi generali di analisi delle reti, consente di ottenere espressioni in forma chiusa delle quantità di interesse, utili sia per un calcolo simbolico che sotto l'aspetto numerico.

Bibliografia

- [1] H.H. Skilling: Electric Networks Theory, Jhon Wiley & Sons, 1974.
- [2] G.I. Atabekov: Linear Network Theory, Pergamon Press, 1965.
- [3] W.H.Hayt, J.E.Kemmerly: Engineering Circuit Analysis, Mc Graw-Hill Kogakusha, 1978.
- [4] N.B. Balabanian, T.A. Bickart: Electrical Network Theory, John Wiley & Sons, 1969.
- [5] C.A. Desoer, E.S.Kuh: Fondamenti di teoria dei circuiti, Franco Angeli, 1978.
- [6] Günter Lehmann: Ungleiche Ventilbelastungen bei Halbleiterstromrichtern, Wiss.Ber.AEG-Telefunken 44 (1971) 3, pag.93.
- [7] A. Di Gerlando, E. Tironi, I. Vistoli: Indagini preliminari di un sistema di conversione c.a.-c.c. distribuito. L'Energia Elettrica N° 4, 1989, pagg. 155-163.
- [8] A. Di Gerlando, E. Tironi, D. Zaninelli: Primi studi sulla fattibilità di un sistema di conversione c.a.-c.c. distribuito. L'Energia Elettrica N° 5, 1989, pagg.243-250.

Manoscritto ricevuto il 12 dicembre 1988.