

"MIRABILI ARTIFICIO"
Santa Maria presso San Satiro

Number and measurement
in the project of the imaginary space
by architect Bramante in Milan

The city of Milan, implicitly associated with finance and manufacturing, is also a treasure trove of works and monuments that testify to an aptitude for excellence that has been consolidated over the centuries as an effect of a constant search for innovation in the arts. A particular and significant example is Bramante's masterpiece of the late 15th-century church of Santa Maria presso San Satiro, which houses a highly effective faux perspective choir, capable of creating the illusion of a space other than the built one, so persistent as to make the reality of the architecture ambiguous.

In fact, the projective relationship between the perspective of the faux chancel and the masonry layout outlines an articulated and rigorous design, in which the position of each element is defined by number and measure. This work stems from the desire to divulge the particularities of a unique monument to the widest possible public, and to offer the Milanese and the city's many visitors an analytical reading of its (geo)metric-perspective peculiarities, one of the first to demonstrate how perspective can be not only a 'constructive' component of architecture, but also the organising principle of an immersive virtual space, which anticipates the digital era by five centuries.

Preface by Pietro Cesare Marani



"MIRABILI ARTIFICIO"

SANTA MARIA PRESSO SAN SATIRO

La città di Milano, implicitamente associata alla finanza e all'industria manifatturiera, è anche uno scrigno di opere e monumenti che testimoniano un'attitudine all'eccellenza che si è consolidata nei secoli come effetto di una costante ricerca di innovazione nelle arti. Un esempio particolare quanto significativo è il capolavoro bramantesco della chiesa tardo quattrocentesca di Santa Maria presso San Satiro, che conserva al suo interno un finto coro prospettico di grande efficacia, capace di creare l'illusione di uno spazio diverso da quello costruito, così persistente da rendere ambigua la realtà dell'architettura. Il rapporto proiettivo tra la prospettiva del finto coro e l'impianto murario, infatti, delinea un progetto articolato e rigoroso, nel quale la posizione di ogni elemento è definita da numero e misura.

Questo libro nasce dal desiderio di divulgare al più ampio pubblico le particolarità di un'opera straordinaria, e offrire, ai milanesi e ai tanti visitatori della città, una lettura analitica delle particolarità (geo)metrico-prospettive di un monumento unico, tra i primi a dimostrare come la prospettiva possa essere non solo una componente 'costruttiva' dell'architettura, ma anche il principio organizzatore di uno spazio virtuale immersivo, che anticipa di cinque secoli l'era digitale.



€ 20,00 9 788833 834474

Giorgio Buratti • Giampiero Mele • Michela Rossi

"Mirabili artificio"

Santa Maria presso San Satiro

Numero e misura nel progetto dello spazio immaginario
di Bramante architetto a Milano

Prefazione di Pietro Cesare Marani



ENGLISH
TEXT

LUOGHI D'ARTE IN ITALIA

Giorgio Buratti, dottore di ricerca in Design e ricercatore presso il Politecnico di Milano - Dipartimento di Design. La sua ricerca si concentra sulla comprensione degli algoritmi generativi e dei sistemi di modellazione parametrica nello studio di superfici articolate e geometrie ad alto livello di complessità; è autore di numerosi saggi e monografie e tenuto seminari e conferenze sul rapporto tra morfologie naturali e progettazione, sullo sviluppo progettuale di strutture formali performative, tecnologie di fabbricazione digitale e uso della geometria e della matematica nei beni culturali.

Giampiero Mele, professore associato di Disegno presso la Facoltà di Lettere dell'Università degli Studi eCampus dove è direttore di quattro Master di primo livello, PhD in rilievo e rappresentazione dell'architettura e dell'ambiente. Autore di numerose pubblicazioni, ha tenuto seminari e conferenze sul tema delle relazioni fra rilievo, geometria e aritmetica nell'architettura storica. Altri campi attivi di ricerca riguardano il disegno dell'architettura, del design e la geometria descrittiva. Fondatore e presidente della IAMAI (International Association in Mathematics and Art - Italy).

Michela Rossi, architetto e dottore di ricerca in Rilievo e Rappresentazione Architettonica, è professore ordinario al Politecnico di Milano - Dipartimento di Design. La sua ricerca riguarda le teorie del design e i modelli di base nel paesaggio, nella città e nell'architettura, concentrandosi sugli archetipi formali e sulla relazione tra forma e geometria nel modello organico e la loro applicazione nel design e nell'architettura biofilica (ornamento, forma, struttura, processo). Si occupa anche dello studio e della applicazione degli strumenti innovativi di rappresentazione nel Design, con particolare attenzione agli interni, e ai beni culturali.

B
e

BIBLION
edizioni

Collana *Luoghi d'arte in Italia*
Direzione Alessandra Coppa

Giorgio Buratti, Giampiero Mele, Michela Rossi
“MIRABILI ARTIFICIO” Santa Maria presso San Satiro
Numero e misura nel progetto dello spazio immaginario di Bramante
architetto a Milano
*Number and measurement in the project of the imaginary space by
architect Bramante in Milan*

Progetto grafico copertina di Andrea Lancellotti
© Marco Introini photography: *Santa Maria presso San Satiro*

ISBN 978-88-3383-447-4

© 2024 BIBLION Edizioni S.r.l.
e-mail: info@biblionedizioni.it
www.biblionedizioni.it

1^a Edizione gennaio 2025

Questo libro è il frutto di un lavoro collegiale, progettato e condiviso da tutti gli autori in ogni sua parte e risultato di una ricerca decennale. L'opera è stata sottoposta al processo di valutazione *double blind peer review* che ne attesta la validità scientifica.

I diritti di riproduzione e di adattamento totale o parziale e con qualsiasi mezzo sono riservati per tutti i Paesi. Nessuna parte di questo libro può essere riprodotta senza il consenso dell'Editore.

Finito di stampare nel mese di gennaio 2025 da LOGO S.p.A. (PD)

Giorgio Buratti, Giampiero Mele, Michela Rossi

“MIRABILI ARTIFICIO”
Santa Maria presso San Satiro

Numero e misura nel progetto dello spazio immaginario di
Bramante architetto a Milano

*Number and measurement in the project of the imaginary space by
architect Bramante in Milan*

BIBLION
edizioni

PREFACE

What better title than the one chosen by the authors of this volume – Mirabili artificio – to introduce the understanding of one of the most famous, but perhaps least visited, monuments of the Milanese Renaissance? The Church of San Satiro and the ‘false choir’ realised by Donato Bramante from around 1482 to 1486 constitute, together with Leonardo’s Last Supper and the Tribuna di Santa Maria delle Grazie, the first act of what can be defined as Lombardy’s entry into the ‘modern manner’, using Vasari’s words. The instruments of this renewal of art and architecture were, first and foremost, perspective and geometry applied to pictorial representation and architecture.

It is no coincidence that Bramante himself went from an initial phase of his presence in Lombardy, starting in 1477, when he is documented in Bergamo, marked above all by the search for the third dimension in painting, to actual three-dimensional architectural realisations. Nor is it coincidental that Leonardo made perspective the primary tool of his investigation into the things of nature and their painted representation. A sheet of considerable importance in the Codex Atlanticus (f. 520 recto, ex 191 recto-a, circa 1490) from his early Milanese period illustrates a serpentiform body, a sort of sinuous mazzocchio, with the annotation ‘Corpo nato della prospettiva di Leonardo Vinci, discepolo della sperienza. Sia fatto questo corpo senza esempio d’alcun corpo, ma solamente con semplici linie’, indicative of the painter’s imaginative abilities and the ‘primato del disegno’. Similarly, it is not strange that Bramante himself began his Milanese career with the “drawing” of the interior of an “old-fashioned” temple, the famous engraving made by Bernardino Prevedari in 1481, commissioned by Matteo de’ Fedeli (whom we find again in San Satiro as the author of a wooden tabernacle in 1482 together with Marco Lombardi) and proudly inscribed ‘BRAMANTI ARCHITECTI OPVS. BRAMANTVS FECIT IN MLO’.

The years of the completion of San Satiro under Bramante’s direction also coincide with the years in which he continued his work as a perspective painter: his frescoes depicting the Uomini d’arme for Casa Visconti Panigarola date from 1486-87, now in the Brera Art Gallery, where the intention to enlarge the physical space of the narrow room (about 6 x 6 metres) where they were depicted in colossal illusionistically painted niches, is not dissimilar to that (already?) experimented in the fake choir of San Satiro, both realisations alluding to the perception of an interior space with a central plan, one, apsidal, with the means of painting (a structure

PREFAZIONE

Quale miglior titolo di quello scelto dagli autori di questo volume – *Mirabili artificio* – per introdurre alla comprensione di uno dei più celebri, ma forse meno visitati, monumenti del Rinascimento milanese? La Chiesa di San Satiro e il ‘finto coro’ realizzato da Donato Bramante dal 1482 al 1486 circa, costituiscono infatti, insieme con il Cenacolo di Leonardo e la Tribuna di Santa Maria delle Grazie, il primo atto di quello che può definirsi l’ingresso della Lombardia nella ‘maniera moderna’, vasarianamente parlando. Strumenti di questo rinnovamento dell’arte e dell’architettura furono, *in primis*, la prospettiva e la geometria applicate alla rappresentazione pittorica e alle architetture.

Non è un caso che lo stesso Bramante passasse da una prima fase della sua presenza in Lombardia, a partire dal 1477, quando è documentato a Bergamo, improntata soprattutto alla ricerca della terza dimensione in pittura, alle vere e proprie realizzazioni architettoniche tridimensionali. Non è neppure casuale che Leonardo facesse della prospettiva lo strumento principe della sua indagine sulle cose di natura e sulla loro rappresentazione dipinta. Un foglio di notevole importanza contenuto nel Codice Atlantico (f. 520 recto, ex 191 recto-a, circa 1490) del suo primo periodo milanese, illustra un corpo serpentiforme, una sorta di sinuoso mazzocchio, corredato dall’annotazione ‘Corpo nato della prospettiva di Leonardo Vinci, discepolo della speranza. Sia fatto questo corpo senza esempio d’alcun corpo, ma solamente con semplici linee’, indicativo non solo delle capacità immaginifiche del pittore, ma anche del ‘primato del disegno’. Analogamente, non è strano che lo stesso Bramante, iniziasse la sua carriera milanese con il ‘disegno’ dell’interno di un tempio ‘all’antica’, la famosa incisione eseguita da Bernardino Prevedari, nel 1481, commissionata da Matteo de’ Fedeli (che ritroviamo proprio in San Satiro come autore di un tabernacolo ligneo nel 1482 insieme a Marco Lombardi) e orgogliosamente iscritta ‘BRAMANTI ARCHITECTI OPVS. BRAMANTVS FECIT IN MLO’.

Gli anni del completamento della Chiesa di San Satiro sotto la direzione di Bramante coincidono inoltre con quelli in cui egli continua la sua attività di pittore prospettico: sono del 1486-87 i suoi affreschi raffiguranti gli Uomini d’arme per Casa Visconti Panigarola, ora nella Pinacoteca di Brera, dove l’intenzione di ampliare lo spazio fisico dell’angusta sala (circa 6 x 6 metri) dove essi erano raffigurati entro colossali nicchie dipinte illusionisticamente, non è dissimile da quella (già?) sperimentata nel finto coro di San Satiro, alludendo entrambe le realizzazioni alla percezione di uno spazio interno a pianta centrale l’uno, absidato, coi mezzi della pittura (ne deriverebbe,

not unlike Leonardo's drawings of churches with a central plan contained in the coeval Ms. B of the Institut de France in Paris, circa 1487), the other with a 'stiacciato' relief (97 cm. deep in all) suggesting the terminal arm of a Greek cross. But the correspondences between Bramante's Milanese activity and Leonardo's, on which the most shrewd critics of the last century, interweaving their scientific and artistic interests, starting with the fundamental studies of Peter Murray (1963), Anna Maria Brizio (1970) and Arnaldo Bruschi (1969 and 1974), have provided keys to interpretations of fundamental importance, are not limited to these affinities. From the famous 'Bramante's groups' (understood as 'groppi', knots, interweavings) cited by Leonardo in the Codex Atlanticus (f. 611a recto, ex 225 recto-b, circa 1490) to the 'edifici di Bramante' cited in Ms. L (Paris, Institut de France, inside front cover; ca. 1499-1502), to their frequentation of building sites that were fundamental to the renewal of Lombard architecture, with their participation in the debates for the building of the Tiburio del Duomo di Milano (ca. 1487-90, this time, however, with a different approach to the plan to be assigned to the Tiburium: square plan suggested by Bramante in his *Opinio*, octagonal plan for Leonardo) and their presence on the building site of the Pavia Cathedral (around and in June 1490), many interests and many places demonstrate similar and interconnected proposals that, perhaps in suggestion of the fake choir of San Satiro, lead, for Leonardo, to the illusionistic perspective representation of the Last Supper in Santa Maria delle Grazie, about 1494-98.

Here too, Leonardo, like Bramante in San Satiro, precisely calculates the point of "station" of the relative, just before the access to the vision of the dome in San Satiro, about halfway through the Refettorio delle Grazie for Leonardo, after which (advancing towards the mural painting or the false choir) the effect of the enlargement of space and its continuation in the 'mirabile artificio' blurs and reveals its fiction.

The authors of this volume have plumbed the depths, and perhaps for the first time, thanks to the use of sophisticated technological instruments of measurement and analysis (calculated on the Lombard arm), which until recently was impossible to have at one's disposal (which add to the previous vital analyses by Adele Buratti Mazzotta), coming to grasp the use of the golden section in Bramante's design, and several discrepancies between the construction of the fake perspective and its (illusory) continuation in the authentic architecture, following, for example, the perspective lines of the cornices, in relief, in the fake choir, and in the real entablature, which do not coincide. It is evident that for Bramante, as for Leonardo, exceptions to the perspective' rules (the dozens of reconstructions proposed for the

in pianta, una struttura non dissimile dai disegni di chiese a pianta centrale di Leonardo contenuti nel coevo Ms. B dell'*Institut de France* a Parigi, circa 1487), l'altro col rilievo 'stacciato' (profondo in tutto 97 cm) a suggerire il braccio terminale di una croce greca. Ma le corrispondenze tra l'attività milanese di Bramante e quella di Leonardo, su cui la critica più avveduta del secolo scorso, intrecciando i loro interessi scientifici e artistici, a partire dagli studi fondamentali di Peter Murray (1963), Anna Maria Brizio (1970) e Arnaldo Bruschi (1969 e 1974), ha fornito chiavi di lettura di basilare importanza, non si limitano a queste affinità. Dai famosi 'gruppi di Bramante' (intesi come 'gropi', nodi, intrecci) citati da Leonardo nel Codice Atlantico (f. 611a recto, ex 225 recto-b, circa 1490) agli 'edifici di Bramante' citati nel Ms. L (Parigi, *Institut de France*, interno della copertina, circa 1499-1502), alla loro frequentazione di cantieri fondamentali per il rinnovamento dell'architettura lombarda, con la loro partecipazione ai dibattiti per l'erigendo Tiburio del Duomo di Milano (circa 1487-90, questa volta, però, con un differente approccio per la pianta da assegnare al tiburio: pianta quadrata suggerita da Bramante nella sua *Opinio*, pianta ottagonale per Leonardo) e alle loro presenze sul cantiere della Cattedrale di Pavia (intorno e nel giugno del 1490), molti interessi e molti luoghi dimostrano simili e interconnesse proposte che, forse proprio in suggestione del finto coro di San Satiro, sfociano, per Leonardo, nella illusionistica rappresentazione prospettica del Cenacolo di Santa Maria delle Grazie, circa 1494-98.

Anche qui Leonardo, come già Bramante in San Satiro, calcola precisamente il punto di 'stazione' del riguardante, poco prima dell'accesso alla visione della cupola in San Satiro, a metà circa del Refettorio delle Grazie per Leonardo, dopodiché (avanzando verso il dipinto murale o verso il finto coro) l'effetto di ampliamento dello spazio e della sua prosecuzione nel 'mirabile artificio' va sfocandosi e rivela la sua finzione.

Gli autori di questo volume hanno scandagliato in profondità, e forse per la prima volta, grazie all'uso di sofisticati strumenti tecnologici di rilevazione e di analisi delle misure (calcolate sul braccio lombardo), di cui fino a poco tempo fa era impossibile disporre (che si aggiungono alle precedenti importanti analisi di Adele Buratti Mazzotta), arrivando a cogliere l'uso della sezione aurea nella progettazione bramantesca, e una quantità di discrepanze tra la costruzione della finta prospettiva e la sua (illusoria) prosecuzione nell'architettura reale, seguendo, ad esempio, le linee prospettiche dei cornicioni, a rilievo, nel finto coro, e nella trabeazione reale, che non coincidono. È evidente che, anche per Bramante, come per Leonardo, le deroghe alle regole prospettiche (le decine di ricostruzioni

perspective supporting the fake room depicted in the Last Supper show how Leonardo deliberately concealed and bent Alberti's perspective to the needs of scenographic illusionism) were permitted, indeed, imposed by the primary purpose he had in mind, which was to suggest a dilation of actual space in order to make one believe one was inside a church with a central plan. This effect was further amplified by Ambrogio Bergognone's frescoes in the transept, which also suggested a breakthrough in the transept walls (now in the Brera Art Gallery).

The common intentions of the two painters-architects-scenographers could be further emphasised by the fact, as far as I am aware, not yet fully known to scholars, that Leonardo himself was active in the San Satiro building site for a circumscribed period, which may go from 1489, back to the years when work on the completion of the church, completed in 1486, was in full swing. Indeed, it is to Giovanni Battista Sannazzaro's credit, who discovered in the parish archives of Santa Maria the name of 'm.ro Leonardo Fiorentino depinctore', together with Francesco Cazzaniga, Giovanni Antonio Amadeo, Antonio da Parma, il Padovanino (Agostino de' Fondulis), Antonio da Pandino and others, among the Fabbrica's debtors for the not inconsiderable sum of 58,13 Lire.¹ Since this 'debt' no longer appears in the accounting records of the following years, it has been suggested that this sum refers instead to a credit left outstanding in previous years for some supply of work by Leonardo as 'depinctore'. Whichever interpretation to be given to the document, it constitutes proof of how Leonardo meditated on Bramante's mock choir in person, adding an important visual element to the perspective sources of the Last Supper, while Leonardo's participation in the design of the counter-façade of Santa Maria (put forward by Richard Schofield) or his involvement in the renovation project of the Sacellum (A.C. Carpiceci, 1982)² remain on the level of hypotheses, in addition to the general considerations of affinity between the latter and the fake choir (also underlined by C. Pedretti, 1978).

I am confident that the studies and new unpublished graphic reconstructions presented in this volume will make a decisive contribution to reconstructing the relationship between the two great architects on a more solid basis and to looking at Bramante's fake choir as one of

¹ See G.B. Sannazzaro, Per S. Maria presso S. Satiro e Leonardo: nuovi documenti, in 'Raccolta Vinciana', fasc. XXV, 1993, pp. 63-85, especially pp. 69 and 73-74. See also Leonardo da Vinci. I documenti e le testimonianze contemporanee, Edited by E. Villata, Presentation by P.C. Marani, Milan, Ente Raccolta Vinciana, 1999, pp. 47-48.

² See Sannazzaro, 1993, p. 74 ff. for the cited bibliography.

proposte per la prospettiva che sorregge la finta stanza raffigurata nel Cenacolo dimostrano come Leonardo abbia volutamente occultato e piegato alle esigenze di illusionismo scenografico la prospettiva albertiana) erano ammesse anzi, imposte dallo scopo principale che egli si proponeva, e cioè quello di suggerire una dilatazione dello spazio reale al fine di far credere che ci si trovasse all'interno di una chiesa a pianta centrale. E quest'effetto doveva essere ulteriormente ampliato dagli affreschi di Ambrogio Bergognone nel transetto che, anch'essi, suggerivano uno sfondamento delle pareti del transetto (ora nella Pinacoteca di Brera).

Gli intendimenti comuni ai due pittori-architetti-scenografi, potrebbero essere ulteriormente sottolineati dal fatto, a quanto mi risulta non ancora del tutto noto agli studi, che nel cantiere di San Satiro fu attivo, per un periodo circoscritto, che può andare dal 1489, a ritroso, agli anni in cui fervevano i lavori di completamento della chiesa, conclusa nel 1486, lo stesso Leonardo. È infatti merito di Giovanni Battista Sannazzaro aver rintracciato nell'Archivio Parrocchiale di Santa Maria presso San Satiro, il nome di '*m.ro Leonardo Fiorentino depinctore*', insieme ad esempio a Francesco Cazzaniga, Giovanni Antonio Amadeo, Antonio da Parma, il Padovanino (Agostino de' Fondulis), Antonio da Pandino e altri, tra i debitori della Fabbrica per la somma non indifferente di 58,13 Lire.¹ Dato che nei registri contabili degli anni successivi questo 'debito' non risulta più, è stato suggerito che questa somma si riferisca invece a un credito rimasto in sospeso in anni precedenti per qualche fornitura d'opera da parte di Leonardo come '*depinctore*'. Quale sia l'interpretazione da dare al documento, esso costituisce la prova di come Leonardo abbia meditato dal vivo sul finto coro di Bramante, aggiungendo un importante tassello visivo alle fonti prospettiche del Cenacolo, mentre ancora restano sul piano delle ipotesi, oltre che le considerazioni generali di affinità fra quest'ultimo e il finto coro (sottolineate anche da C.Pedretti, 1978), la partecipazione di Leonardo alla progettazione della controfacciata di Santa Maria (avanzata da Richard Schofield) o la sua partecipazione al progetto di ristrutturazione del Sacello (A.C.Carpiceci, 1982).²

Sono certo che gli studi e le nuove inedite ricostruzioni grafiche presentate in questo volume contribuiranno in maniera determinante a ricostruire su più solide basi le relazioni fra i due grandi architetti e a guardare al finto

¹ Vedi G.B.Sannazzaro, *Per S.Maria presso S.Satiro e Leonardo: nuovi documenti, in 'Raccolta Vinciana'*, fasc. XXV, 1993, pp. 63-85, specie pp. 69 e 73-74. Vedi anche *Leonardo da Vinci. I documenti e le testimonianze contemporanee*, A cura di E.Villata, Presentazione di P.C.Marani, Milano, Ente Raccolta Vinciana, 1999, pp. 47-48.

² Vedi Sannazzaro, 1993, p. 74 e sgg. per la bibliografia citata.

the most sensational and essential proposals inaugurating the sequence of masterpieces of modern architecture and Lombard perspective, 'senza esempio d'alcun corpo', to use Leonardo's expression quoted in the introduction, that is, without any known precedent from which it might have been inspired. We are therefore grateful to Giorgio Buratti, Giampiero Mele, and Michela Rossi for their precious and, from now on, indispensable work in the analysis and restitution of Bramante's fake choir in San Satiro.

Pietro C. Marani

*Art Historian
Honorary Professor
at Milan Polytechnic*

coro di Bramante come ad una delle più sensazionali e importanti proposte che inaugurano la sequenza dei capolavori dell'architettura moderna e della prospettiva lombarda, *'sanza esempio d'alcun corpo'*, per usare l'espressione di Leonardo citata in apertura, cioè senza alcun precedente a noi noto cui potesse essersi ispirato. Siamo perciò grati a Giorgio Buratti, Giampiero Mele e Michela Rossi per il loro prezioso e, d'ora in avanti, imprescindibile lavoro d'analisi e di restituzione del finto coro bramantesco di San Satiro.

Pietro C. Marani

Storico dell'Arte
Professore onorario
del Politecnico di Milano

“MIRABILI ARTIFICIO” Santa Maria at San Satiro

Number and measurement in the project of the imaginary space by architect Bramante in Milan

INDEX

<i>Preface by Pietro C. Marani</i>	<i>4</i>
<i>Introduction</i>	<i>14</i>
The Project	20
- <i>The Building</i>	<i>20</i>
- <i>Geometry. The plan and spatial scheme</i>	<i>26</i>
- <i>Number and measure. The Divine Proportion</i>	<i>32</i>
History. Before and after Bramante	44
- <i>The church before Bramante</i>	<i>44</i>
- <i>Bramante’s church</i>	<i>46</i>
The Perspective	52
- <i>The perspective illusion</i>	<i>52</i>
- <i>The dynamic perspective</i>	<i>58</i>
- <i>The scientific development</i>	<i>64</i>
The Knowledge	70
- <i>Surveys and historical studies</i>	<i>70</i>
- <i>The instrumental survey and spatial reading</i>	<i>76</i>
Conclusion. Perspective and actual space	96
- <i>Linear perspective</i>	<i>100</i>
<i>Appendixes:</i>	
<i>Glossary</i>	<i>104</i>
<i>Chronology</i>	<i>112</i>
<i>Bibliography</i>	<i>120</i>

“MIRABILI ARTIFICIO” Santa Maria presso San Satiro
Numero e misura nel progetto dello spazio immaginario di Bramante
architetto a Milano

INDICE

Prefazione di Pietro C. Marani	5
Introduzione	15
<i>Il Progetto</i>	21
- L'edificio	21
- Geometria. Impianto e articolazione spaziale	27
- Numero e misura. La <i>Divina Proportione</i>	33
<i>La Storia. Prima e dopo Bramante</i>	45
- La chiesa prima di Bramante	45
- La chiesa di Bramante	47
<i>La Prospettiva</i>	53
- L'inganno prospettico	53
- La prospettiva dinamica	59
- La maturazione scientifica	65
<i>La Conoscenza</i>	71
- Rilievi e studi storici	71
- Il rilievo strumentale e la lettura dello spazio	77
<i>Conclusione. Prospettiva e spazio reale</i>	97
- Prospettiva lineare	101
Appendici:	
Glossario	105
Cronologia	113
Bibliografia	120

Introduction

The 2015 Expo changed the interest in Milan. Foreigner visitors have (re) discovered that the Lombard capital, implicitly associated with business and work as a hub of big finance and manufacturing, is a treasure trove of works of art and monuments with nothing to envy from other art cities in the country. The city has also become more attractive for the masterpieces of ingenuity it preserves, which testify to an aptitude for excellence that citizens consolidated over the centuries as an effect of a constant search for innovation in the arts. This 'design genius' has been at the root of the success of Italian design, featured by the ability to reconcile function and emotion with practical design solutions that are surprising in their apparent simplicity. A particular and significant example is Bramante's masterpiece of the late 15th-century church of Santa Maria at San Satiro, which preserves a highly effective fake perspective choir inside, capable of creating the illusion of a space other than the built one, so persistent as to make the reality of the architecture ambiguous.

Inconspicuous from the outside, the building is a 'secondary' tourism destination, appreciated by a select audience but less known to the standard public despite the important legacy it has left to architecture and theatrical scenography. People have been celebrating this church since its construction for the effectiveness of its fake perspective choir. The critics have referred to the development of the central plan and the debate for the construction of St. Peter's in Rome. The hypothesis finds confirmation in the refinement of the design programme that defines the device performed by Bramante in the interior through an unprecedented application of the science of perspective. The projective relationship between the perspective of the false choir and the wall layout outlines an articulate and rigorous design programme in which numbers and measures define the position of each element. The latter demonstrates the quality of the search for perfection in 15th-century architecture in Milan.

Arithmetic and Geometry – two liberal arts of the quadrivium – provided the tools to connect between concrete and seeable things and invisible because immaterial ones; through perspective, Bramante made imagination real. In the 15th century, architects pursued translating divine perfection into earthly language, controlling harmony in the proportions of artificial space. Geometry was the science of investigating the reality of space, searching for the possible and the plausible in articulating new architectural configurations. Bramante concretises the space by virtual reality, visualising the verisimilar in the possible. The reading in Milanese

Introduzione

L'Expo del 2015 ha cambiato l'interesse per Milano. I visitatori hanno (ri) scoperto che il capoluogo lombardo, implicitamente associato all'economia e al lavoro come polo della grande finanza e dell'industria manifatturiera, è uno scrigno di opere e monumenti senza nulla da invidiare alle altre città d'arte del paese. In un decennio, la città è diventata più attrattiva anche per i capolavori di ingegno che conserva. Questi testimoniano un'attitudine all'eccellenza che si è consolidata nei secoli come effetto di una costante ricerca di innovazione nelle arti. Questa 'genialità progettuale' è poi stata alla base del successo del design italiano, caratterizzato dalla capacità di conciliare funzione ed emozione con soluzioni progettuali efficaci e sorprendenti nella loro apparente semplicità. Un esempio particolare quanto significativo è il capolavoro bramantesco della chiesa tardo quattrocentesca di Santa Maria presso San Satiro, che conserva al suo interno un finto coro prospettico di grande effetto, capace di creare l'illusione di uno spazio diverso da quello costruito, così persistente da rendere ambigua la realtà dell'architettura.

Poco appariscente all'esterno, l'edificio è una meta 'secondaria' del turismo comune, apprezzata solo da un pubblico selezionato di cultori, nonostante l'importante eredità che ha lasciato all'architettura e alla scenografia teatrale. La chiesa è celebrata sin dalla costruzione per l'efficacia del suo finto coro, che la critica storica ha riferito allo sviluppo della pianta centrale e al dibattito per la costruzione di San Pietro a Roma. L'ipotesi trova una conferma nella raffinatezza del programma progettuale che definisce l'artificio operato dal Bramante nello spazio interno della chiesa grazie a un'applicazione inedita della scienza prospettica. Il rapporto proiettivo tra la prospettiva dell'opera e l'impianto murario infatti, delinea un programma progettuale articolato e rigoroso, nel quale la posizione di ogni elemento è definita da numero e misura, dimostrando la qualità della ricerca di perfezione nell'architettura quattrocentesca a Milano.

Aritmetica e Geometria – due arti liberali del quadrivio – fornivano gli strumenti per disegnare un collegamento tra le cose concrete e quindi visibili e quelle invisibili perché immateriali, attraverso l'immaginazione, che Bramante rende reale attraverso la prospettiva. Nel Quattrocento, all'architetto era affidato il compito di tradurre la perfezione divina nel linguaggio terreno, controllando l'armonia nelle proporzioni dello spazio artificiale. La Geometria era la scienza per indagare la realtà dello spazio, alla ricerca del possibile e del plausibile nell'articolazione di nuove configurazioni architettoniche. Creando una realtà virtuale, Bramante ne concretizza lo spazio rappresentando il verosimile nel possibile. La

feet of the survey measurements reveals the project's original conception in the design pattern and the numerical programme that rules the architecture. In the spatiality of the architecture evoked by the articulation of the faux chancel, Bramante took up the model of Masaccio's Trinity, reworking the model of Donatello's solid perspective, brought to full scale to visualise a space other than the built one. The idea was novel. Only in the 17th century did the theatre set design adopt it as a theoretical model, forcing the stage's space. Bramante's experiment also left its mark on the Baroque development of anamorphosis³.

The alignment of the perspective choir depth lines with the perspective of the nave ensured the effectiveness of the perspective artifice along the approach to the altar. The problem to be solved was the collimation of the two perspectives: the illusion created by the fake choir and the telescope of the nave. Bramante solves the problem with a relatively simple perspective scheme, which guarantees the effectiveness of the illusion from the entrance to the point from which one begins to see the dome. By reflection, one raises one's head towards the light. Its perspective machine applies two coincident projection directions on parallel planes so it does not distort the perspective along the axis; the effectiveness is constant from the entrance to the point of the fake choir projection. The mastery of the design emerges from the continuity between the real architecture and the perspective apparatus. The result demonstrates that by handling the tools for measuring perspective space, it becomes possible to exploit its representational potential and control the spatial integration of figurative space in architecture.

The conception of a visual space other than constructive space paves the way for the perspective representation of the theatrical scene, confirming the importance of geometry as a tool for controlling and measuring space also through the cancellation of the solution of continuity between physical space and visual space. For the first time, the perspective materialises an artifice through which the image of a fictional space interacts with real space. A figurative space dilates the room seamlessly. The key is to integrate the architectura ficta into the actual space, using pictorial or plastic perceptual devices to conceal the critical points of the boundary between real and virtual space, as the creators of the great season of Quadraturism, undoubtedly influenced by Father Pozzo's Milanese experience, would also do.

At the end of the 15th century, in Milan, perspective became a 'constructive' element of architectural space; Bramante invented a new form of artificial

³ Baglioni L., Salvatore M. (2017).

geometria dello schema ideale e il programma numerico ricostruito dalla lettura in piedi milanesi delle misure di rilievo rivelano la concezione assolutamente originale del progetto.

Nella spazialità dell'architettura evocata dall'articolazione del finto coro, Bramante riprende il modello della Trinità di Masaccio, rielaborando il modello dello *stiacciato* prospettico di Donatello, portato a scala reale per visualizzare uno spazio diverso da quello costruito. L'idea era inedita e in seguito fu ripresa e adottata dalla scenografia teatrale, forzata a contrarre lo spazio della scena, che nel Seicento ne definì il modello teorico. L'esperimento bramantesco era però destinato a lasciare un segno anche nello sviluppo barocco dell'anamorfofi.³

L'allineamento delle rette di profondità del coro con la prospettiva della navata garantisce l'efficacia dell'artificio prospettico lungo il percorso di avvicinamento all'altare. Il problema da risolvere era la collimazione delle due prospettive: l'illusione creata dal finto coro e il cannocchiale della navata. Bramante risolve il problema con uno schema relativamente semplice, che garantisce l'efficacia dell'illusione dall'ingresso sino al punto da cui si inizia a vedere la cupola, e dove per riflesso si alza la testa verso la luce. La sua macchina prospettica applica due direzioni di proiezione coincidenti su piani paralleli e quindi non distorce la prospettiva lungo l'asse mantenendo costante l'effetto illusorio lungo tutto il percorso di avvicinamento, dall'ingresso al punto di proiezione del falso coro. La maestria del disegno progettuale emerge dalla continuità tra l'architettura reale e l'apparato prospettico. Il risultato dimostra come, una volta acquisiti gli strumenti per la misurazione dello spazio, è possibile sfruttarne le potenzialità rappresentative, e controllare l'integrazione spaziale del progetto illusorio nell'architettura.

La concezione di uno ambiente visivo diverso da quello costruttivo apre la strada alla rappresentazione prospettica della scena teatrale, confermando l'importanza della geometria come strumento di controllo e misura dello spazio anche attraverso l'annullamento della soluzione di continuità tra spazio fisico e spazio visivo. Così, per la prima volta, la prospettiva materializza un artificio attraverso il quale l'immagine di uno spazio fittizio interagisce con lo spazio reale. Lo spazio figurato dilata la stanza senza soluzione di continuità. La chiave è integrare l'*architectura ficta* nello spazio reale, utilizzando dispositivi percettivi pittorici o plastici per nascondere i punti critici del confine tra lo spazio reale e quello virtuale, come faranno anche gli artefici della grande stagione del Quadraturismo, sicuramente influenzati dall'esperienza milanese di padre Pozzo.

³ Baglioni L., Salvatore M. (2017).

space, combining actual architecture and illusory space with a continuity based on the coherence between two perspectives, the visual image of natural space and that of the space represented on the wall surface.

The effectiveness of the virtual space of San Satiro, which visualises a central plan within the church, is an experimental contribution to the debate on the central plan destined to result in the construction of St. Peter's in Rome. The perspective artifice, placing the observation point at the entrance of a nave that is longer than the two arms, visualises a layout with a transept, choir and nave of the same length. Thus, from the privileged point of the anamorphosis, the optical cone of the field of vision gathers the perception of a Greek cross plan.

The reinterpretation of Bramante's scheme in the design programme that emerges from the survey thus confirms the thesis of architectural historians, who agree in considering the Milanese church an essential reference in the debate that led to the development of the central plan.

This book stems from the desire to make known to a broader public than the limited circle of scholars who have dealt with it until now in specialised scientific circles the particularities of a unique monument that documents the city's propensity for innovation in the late 15th century and the technical-scientific originality of the works. After years of studies and publications aimed at a specialised academic forum, we felt it was essential to offer the Milanese and the many foreigners visiting the city an analytical reading of the (geo)metric-perspective peculiarities of a unique monument, which is the first to demonstrate how perspective can be a 'constructive' component of architecture.

Subsequent investigations, conducted on a digital survey carried out as part of a university research project with ministerial funding, revealed little by little the refinement of Bramante's achievement, capable of realising an immersive virtual space, five centuries before the digital era, thanks to experimentation conducted through drawing and knowledge of geometry, combined with perspective.

Alla fine del Quattrocento, a Milano, la prospettiva diventa un elemento 'costruttivo' dello spazio architettonico; Bramante inventa una nuova forma di spazio artificiale, combinando architettura reale e spazio illusorio con una continuità basata sulla coerenza tra due prospettive, quella dello spazio reale e quella dello spazio rappresentato sulla superficie muraria.

L'efficacia dello spazio virtuale di San Satiro, che visualizza una pianta centrale all'interno della chiesa, è un contributo sperimentale al dibattito sulla pianta centrale, destinato a sfociare nella costruzione di San Pietro a Roma. L'artificio prospettico, ponendo il punto di osservazione all'ingresso di una navata più lunga degli altri bracci, crea un impianto con transetto, coro e navata della stessa lunghezza e quindi, dal punto privilegiato di osservazione dell'anamorfose, il cono ottico del campo visivo raccoglie la percezione di una pianta a croce greca.

La rilettura dello schema bramantesco nel programma progettuale che emerge dal rilievo conferma quindi la tesi degli storici dell'architettura, concordi nel considerare la chiesa milanese un importante riferimento nel dibattito che ha portato allo sviluppo della pianta centrale.

Questo libro nasce dal desiderio di far conoscere a un pubblico allargato rispetto alla ristretta cerchia di studiosi che se ne sono occupati sino ad oggi in ambiti scientifici specialistici, le particolarità di un monumento unico che documenta propensione all'innovazione della città a fine Quattrocento e l'originalità tecnico-scientifica delle opere. Dopo anni di studi e pubblicazioni rivolte a un consesso accademico specialistico, ci è sembrato importante offrire ai milanesi e ai tanti visitatori della città una lettura analitica delle particolarità (geo) metrico-prospettiche di un monumento unico, che dimostra per primo come la prospettiva possa essere una componente 'costruttiva' dell'architettura.

Indagini successive, condotte su un rilievo digitale realizzato nell'ambito di una ricerca universitaria con finanziamento ministeriale, hanno rivelato poco per volta la raffinatezza della realizzazione del Bramante, capace di realizzare uno spazio virtuale immersivo, cinque secoli prima dell'era digitale, grazie ad una sperimentazione condotta attraverso il disegno e la conoscenza della geometria, coniugati nella prospettiva.

THE PROJECT

The building

Santa Maria at San Satiro is celebrated for its perspective choir made of wood and stucco, which simulates a depth equal to that of the transept in a derisory space created in the thickness of the apse wall (Fig.1 and Fig.2). The false choir is covered by a coffered vault that extends the pictorial decoration of the nave, dilating the space. This innovative solution is attributed to Donato Bramante on a documentary basis, but no design drawings or other documents of the period have survived to explain the origin and construction of the perspective apparatus that visualises a Latin cross plan in a building with a commissioned cross layout. This application of perspective with illusory intent was alien to the early Renaissance concept of mathematical and rational measurement of space. The result ensured the esteem of his contemporaries for the Urbino artist, already nicknamed ‘il Prospettivo’ (the prospective), establishing his fame as an architect.

*The spatial effectiveness of the fake choir justifies the appellation ‘Mirabili artificio’, coined by duke Ludovico il Moro to indicate the perspective device imagined by Bramante,⁴ underlining the genius of the idea of visualising a virtual space with a full-scale perspective, which alters the relationship between architecture and space: perspective stops being a simple representation to become an architectural device that interacts with the built environment and transforms it, paving the way for all subsequent applications. This innovation led to the great season of *Quadratura*, which merges architecture and pictorial decoration in a unified design to expand interior space beyond the material dimension of the wall, and to modern scenography, up to the many scenographic applications of the Baroque. (Salvatore and Baglioni 2017).*

Like many Renaissance Marian churches, most of which have a central plan, the construction followed a miraculous event, which prompted the construction of a larger building to accommodate the many praying pilgrims. Construction began before Bramante’s arrived in Milan; he had to adapt his design to the pre-existing situation and significant location constraints. The plan was to build a new church on an irregular lot between the Saccello di San Satiro, Via Torino and a public street, today’s

⁴ The title ‘Mirabili artificio’ appears in the deed of approval by the Scuola di Santa Maria at San Satiro, granted in 1480 by Bona di Savoia and Galeazzo Maria Sforza. The hypothesis that it refers to the fake choir is recurrent. cf. Romanini 1974, p. 52, footnote 3; Lise 1975, pp. 11-16; Cf. also Bruschi 1987; Borsi 1992 and Camerota 2006, footnote 23 p. 329.

IL PROGETTO

L'edificio

Santa Maria presso San Satiro è celebrata per il suo coro prospettico in legno e stucco che simula una profondità pari a quella del transetto in uno spazio irrisorio ricavato nello spessore del muro absidale (Fig.1 e Fig.2). Il finto coro è coperto da una volta a cassettoni che prolunga la decorazione pittorica della navata, dilatando lo spazio. Questa soluzione inedita è attribuita a Donato Bramante su base documentale, ma non sono pervenuti disegni di progetto o altri documenti dell'epoca che spieghino l'origine e la costruzione dell'apparato prospettico che visualizza una pianta a croce latina in un edificio con impianto a croce commissa. Infatti, l'applicazione della prospettiva con intenti illusori era estranea al concetto di misurazione matematica e razionale dello spazio del primo Rinascimento e il risultato assicurò la stima dei contemporanei dell'artista urbinato, già soprannominato 'il Prospettivo', affermandone la fama anche come architetto.

L'efficacia spaziale dal finto coro giustifica l'appellativo di '*Mirabili artificio*', coniato dal duca Ludovico il Moro per indicare l'inusuale soluzione bramantesca,⁴ che sottolinea la genialità dell'idea di visualizzare uno spazio virtuale con una prospettiva in scala reale, alterando il rapporto tra l'architettura e lo spazio. La prospettiva smette di essere una rappresentazione per diventare un dispositivo che interagisce con il costruito e ne trasforma lo spazio, aprendo la strada alle applicazioni dei secoli seguenti. L'innovazione introduce alla stagione della Quadratura, che fonde architettura e decorazione pittorica in un progetto unitario per dilatare lo spazio interno oltre la dimensione materiale del muro, e alla scenografia teatrale moderna, sino alle fantasiose applicazioni del Barocco (Salvatore e Baglioni 2017).

Come molte chiese mariane del Rinascimento, la maggior parte delle quali ha pianta centrale, la costruzione segue un evento miracoloso, che spinge la costruzione di un edificio più grande per ospitare le preghiere di fedeli e pellegrini. La riedificazione iniziò prima dell'arrivo a Milano di Bramante, che dovette adattare il progetto a preesistenze e vincoli importanti. Il programma prevedeva la realizzazione di una nuova chiesa in un lotto irregolare, compreso tra il Sacello di San Satiro, la via Torino e una strada

⁴ Il titolo '*Mirabili artificio*' compare nell'atto di approvazione della Scuola di Santa Maria di San Satiro, concesso nel 1480 da Bona di Savoia e Galeazzo Maria Sforza. L'ipotesi che si riferisca al finto coro è ricorrente cfr. Romanini 1974, p. 52, nota 3; Lise 1975, pp. 11-16; Cfr. anche Bruschi 1987; Borsi 1992 e Camerota 2006, nota 23 p. 329.



Fig. 1 Vista frontale del finto coro di Bramante (Foto degli autori).
Front view of Bramante's fake choir (Photo by the authors).

Via del Falcone. Historical critics agree in indicating the church's layout as a Latin cross with a false arm, a prelude to the plan of the Roman St Peter's (Bruschi 1969), emphasising the role of the Milanese church in the development of the central plan. In fact, this plan shows similarities with Bramante's design for St Peter's, recalling the layout of San Satiro, whose ideal scheme would condition all subsequent projects until the final solution (Fig.3).

In reality, even considering the perceived space instead of the built space, the plan is not in the form of a Greek cross but of a Tau: the nave is marked by five bays, while there are three in the transepts and in the false choir, which simulates a similar depth to that of the transepts, one of which leads to the small building that houses the remains of San Satiro⁵. At the two sides, symmetrical side aisles run along one

⁵ *The small tomb building was erected before 879. The interior, set in a cylindrical drum marked on the outside by small niches, has a square layout with three apsidioles organised around the central space, defined by four columns supporting an octagonal windowed lantern. The wall decorations are coeval with the construction of the sacellum; above the high altar, there is a sculptural group created between 1482 and 1483 by the Cremasque artist Agostino de Fonduli.*



Fig. 2 Vista laterale del finto coro di Bramante (Foto degli autori).
Side view of Bramante's false choir (Photo by the authors).

pubblica, l'attuale Via del Falcone, ma l'architetto riuscì ugualmente a realizzare il suo progetto. La critica concorda nell'indicare l'impianto della chiesa come una croce latina con un braccio finto, che per gli storici è un preludio alla pianta del San Pietro romano (Bruschi 1969), sottolineando il ruolo della chiesa milanese nello sviluppo della pianta centrale. In effetti la pianta mostra diverse analogie con il progetto bramantesco per San Pietro, che richiama l'impianto di San Satiro, il cui schema ideale condizionerà tutti i progetti successivi sino alla soluzione finale (Fig.3).

In realtà, anche considerando lo spazio percepito, la pianta non ha la forma di una croce greca, ma di *Tau*: la navata è scandita da cinque campate, mentre queste sono tre nei transetti e nel finto coro, che simula una profondità analoga a quella del transetto che conduce al piccolo edificio che conserva le spoglie di San Satiro⁵. Le due navate laterali sono simmetriche e girano

⁵ Il piccolo edificio sepolcrale fu eretto prima dell'879. L'interno, inserito in un tamburo cilindrico scandito all'esterno da piccole nicchie, ha impianto quadrato con tre absidiole organizzate intorno allo spazio centrale, definito da quattro colonne che reggono una lanterna ottagonale. Le decorazioni parietali sono coeve alla costruzione del sacello, sopra l'altare maggiore c'è un gruppo scultoreo realizzato tra il 1482 e il 1483 dall'artista cremasco Agostino de Fonduli.

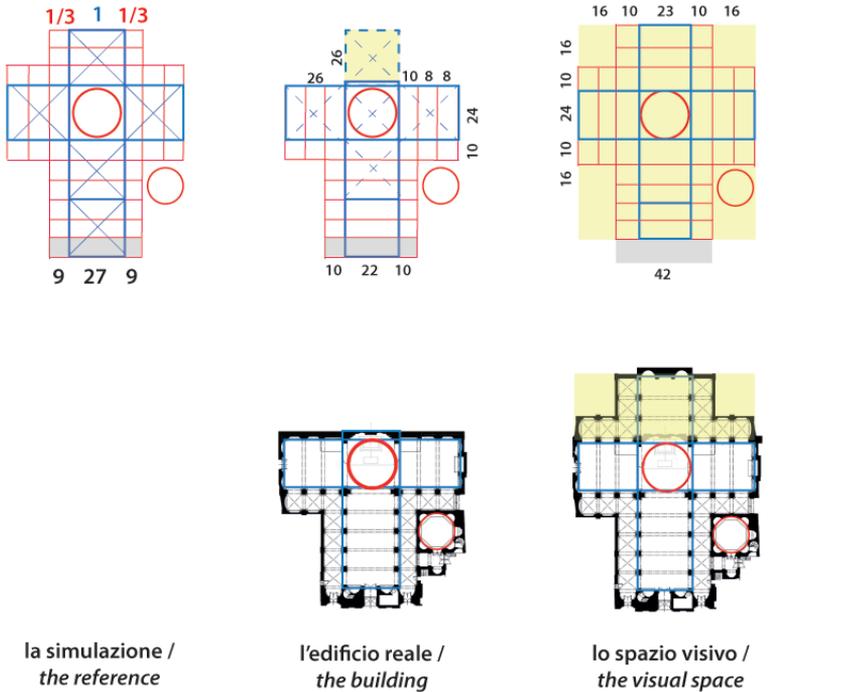


Fig. 3 Geometrical schemes and ideal references of authentic architecture.

transept's side; on the altar side, shallow niches similar to those of the false choir simulate the side aisles.

The virtual space generated by the perspective, radiates from the coffered dome, evoking a central space that would otherwise be non-existent despite the different effective lengths of the nave, choir and transept. The perspective chancel solves the impossibility of a deeper apsidal termination due to the presence of the road at the back, which prevented the construction of a chancel beyond the large cross vault, in axis with the nave (Fig.4). The virtual space generated by the perspective enhances the centrality of the large coffered dome, which is realised in the perception of a hybrid space in which actual architecture and visual simulation merge seamlessly. Like the nave, the fake choir is covered by a barrel vault, made more credible by the perspective relief of the coffers, which instead in the nave and transept are only painted, inverting reality and fiction as if in a game.

The solution is novel, but Bramante reworks other Florentines, at least as a cultural origin. The interior is reminiscent of Alberti's Sant'Andrea in Mantua. The compositional structure of the choir recalls the chapel

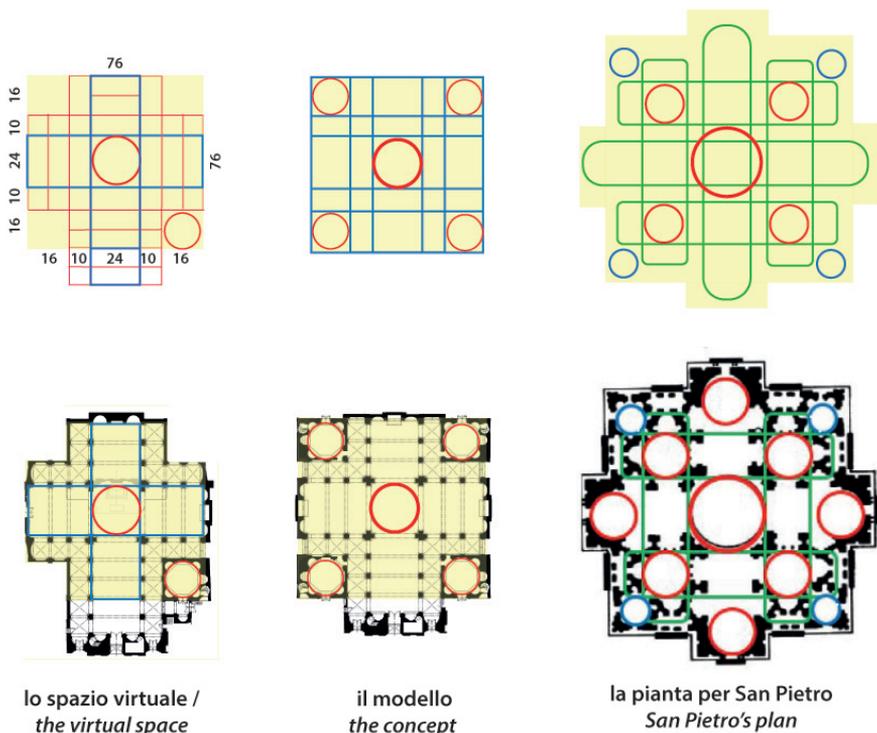


Fig. 3 Schemi geometrici e riferimenti ideale dell'architettura reale.

lungo un lato del transetto; dalla parte dell'altare esse sono simulate da nicchie poco profonde, simili a quelle del finto coro.

L'illusione generata dalla prospettiva crea uno spazio virtuale che si irradia dalla grande cupola a cassettoni, evocando una centralità altrimenti inesistente per la diversa lunghezza effettiva di navata, coro e transetto. La prospettiva accelerata del finto coro risolve l'impossibilità di una terminazione absidale più profonda per la presenza della strada sul retro, che impediva la costruzione di un coro vero oltre la grande crociera, in asse con la navata (Fig.4). Lo spazio illusorio generato dalla prospettiva esalta la centralità della grande cupola a cassettoni, che si concretizza nella percezione di uno spazio ibrido, nel quale architettura reale e simulazione visiva si fondono senza soluzione di continuità. Come la navata, il finto coro è coperto da una volta a botte resa più credibile dal rilievo prospettico dei cassettoni, che invece nella navata e nel transetto sono solo dipinti, invertendo come in un gioco realtà e finzione.

Bramante, che era già famoso come pittore esperto di prospettiva, la usa qui per la prima volta con una valenza architettonica, integrando l'apparato



Fig. 4 Dall'immagine si evince come la chiesa non possa avere un coro reale a causa della presenza di via del Falcone.

The picture shows that the church cannot have an actual choir because of the presence of Via del Falcone.

depicted in Masaccio's The Trinity, whose perspective on life is attributed to Brunelleschi. Eventually, the solid perspective echoes the perspective stacciato in the panels sculpted by Donatello in Padua (Camerota 2006). The full-scale application produces an effect that is as novel as it is effective. The solid perspective of the chancel recomposes the perception of a central space dominated by a dome, rebalancing the image of the interior, which the Tau cross shape of the plan would have made asymmetrical. Applying the geometric principles of perspective to architecture, he finds a striking solution that extends the nave beyond the dome. Bramante transforms a meagre space into a monumental break-through, as deep as the two transepts (Fig.5a and Fig.5b).

The choir is considered one of the earliest examples of modern stage design, manifesting the space of an architecture impossible to build according to the measurements of the ideal design scheme. The 26-foot-long arms of the transept are compressed into the 2 feet of the actual depth of the fake choir, which the perspective dilates, providing adequate support for the visual balance of the dome on pendentives, otherwise precarious due to the lack of ample structures to counter lateral thrusts, as required by Renaissance building rules, as in the examples of Raphael's Sant'Andrea and 'The School of Athens'.

Geometry. The plan and spatial scheme

Considering the virtual space evoked, a square pattern defines the plan and the elevation by a square divided into nine minor ones, five of which draw the Tau cross of the built plan. The nave and transept are tripartite by the scanning of the bays. At the same time, the entrance

in legno e stucco del coro nello spazio fisico della costruzione muraria. La soluzione è inedita, ma nasce dalla rielaborazione di modelli di cultura fiorentina. L'interno richiama il Sant'Andrea dell'Alberti a Mantova e la struttura compositiva del coro rielabora l'idea della cappella de La Trinità di Masaccio, la cui prospettiva al vero è attribuita a Brunelleschi, mentre la prospettiva in rilievo riprende lo stacciato prospettico nelle formelle scolpite da Donatello a Padova (Camerota 2006).

L'applicazione a scala reale produce un effetto sorprendente, quanto funzionale. La prospettiva solida del coro materializza la percezione di uno spazio centrale che culmina in una cupola, riequilibrando l'asimmetria della pianta a croce commissa. Senza questa simulazione strategica, la pianta a *Tau* avrebbe generato uno spazio sbilanciato. Invece Bramante integra i principi geometrici della prospettiva nell'architettura costruttiva per prolungare la navata oltre la cupola, trasformando uno spazio esiguo in uno sfondato monumentale profondo come i transetti (Fig.5a e Fig.5b). Il coro, considerato uno dei primi esempi di scenografia moderna, manifesta così lo spazio di un'architettura impossibile da costruire secondo le misure dello schema di progetto ideale. I bracci lunghi 26 piedi del transetto si comprimono nei 2 piedi della profondità reale del finto coro, che la prospettiva dilata, garantendo un supporto adeguato all'equilibrio visivo della cupola su pennacchi, altrimenti precario per la mancanza di ampie strutture di contrasto alle spinte laterali, come richiedevano le regole costruttive rinascimentali, come negli esempi del Sant'Andrea e de 'La Scuola d'Atene' di Raffaello.

Geometria. Impianto e articolazione spaziale

Se si considera anche lo spazio fittizio evocato dalla prospettiva, l'impostazione planimetrica e l'alzato della chiesa sono impostati su uno schema *ad quadratum*, definito da un quadrato maggiore diviso in 9 minori, 5 dei quali disegnano la croce a *Tau* della pianta reale. Navata e transetto sono tripartiti dalla scansione delle campate, mentre il quadrato d'ingresso perde una campata in facciata, occupata dall'ingresso e dalla scaletta che sale alla balconata dell'organo.

La lettura metrologica delle misure rilevate sottolinea l'esistenza di relazioni particolari tra architettura e prospettiva, svelando un programma progettuale raffinato, che dimostra l'inventiva e l'abilità del Bramante, capace di superare i molti vincoli dovuti alle preesistenze con un disegno unitario e coerente, oltre la soluzione spaziale innovativa. Quest'ultimo concilia i presupposti culturali dell'epoca con la ricerca di nuove soluzioni formali attraverso la sperimentazione empirica della scienza prospettica.

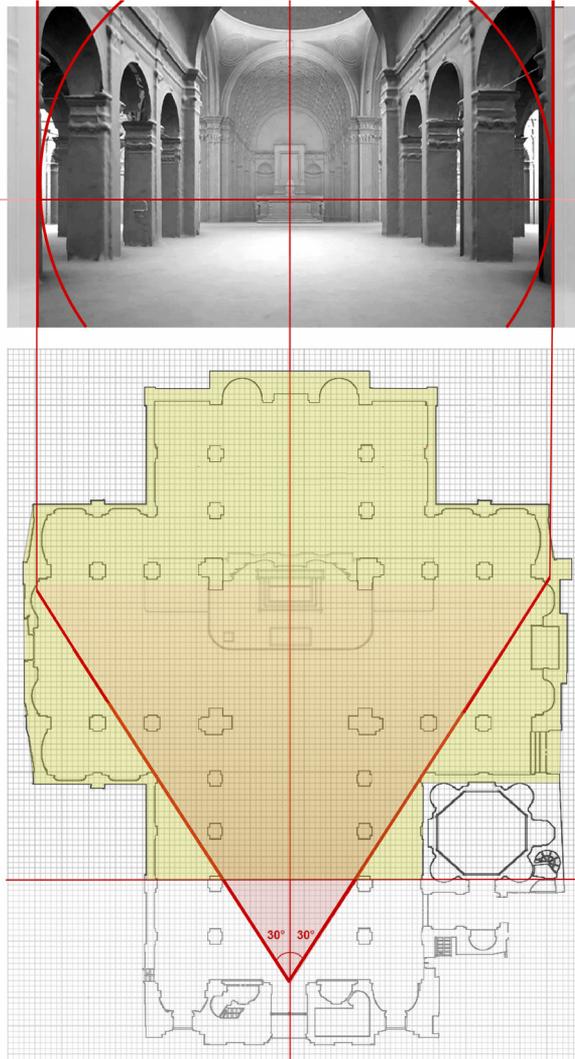


Fig. 5a Percezione visiva all'ingresso.
Visual perception on entry.

square loses a bay in the façade, which hosts the entrance and the staircase rising to the organ balcony.
The metrological verification of the surveyed measurements underlines the existence of particular geometric relations between architecture and perspective, revealing a refined design program that demonstrates Bramante's inventiveness and skill, capable of overcoming the many constraints due to the pre-existing context with a unitary and coherent

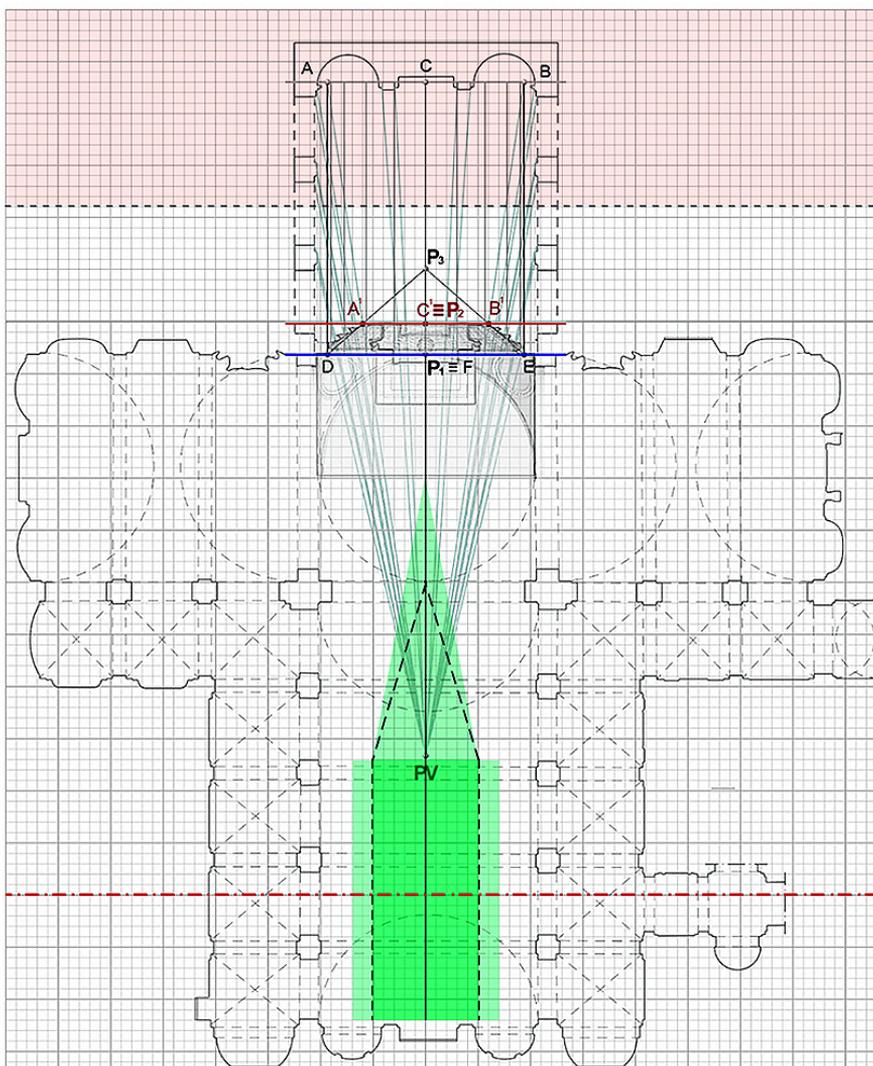


Fig. 5b Area di precezione dello spazio virtuale.
Virtual space perception area.

Le misure di rilievo rivelano una relazione diretta della costruzione con il piede milanese (1 piede equivale a 0,435185m.), che ha multipli e sottomultipli in base 6. Il trabucco (1 trabucco = 6 piedi) è la misura che modula la pianta teorica.

Lo schema di partenza si organizza in un quadrato maggiore di 72 piedi di lato (= 7 trabucchi), diviso in 9 moduli minori da 24 piedi (24: 6 = 4 trabucchi), cinque dei quali definiscono la *Tau* di navata e transetto nella

design, as well as innovative, which reconciles the cultural assumptions of the time with the desire to go further; experimenting new formal solutions through empirical experimentation of the science of perspective. The measurements of the direct relief reveal a direct relationship of the construction with the Milanese foot (1 foot = 0.435185 metres), which has multiples and submultiples in base 6, and the trabucco (1 trabucco = 6 feet) is the measurement that modulates the plan.

A simplified theoretical scheme shows a big square of 72 feet wide, divided into nine minor modules of 24 feet ($24: 6 = 4$ trabucchi), five of which define the Tau of nave and transept in the grid of 3×3 minor squares ($24 \times 3 = 72$ feet/12 trabucchi). The smaller square defines the width of the central space of the generating square, occupied by the nave. The tripartition of the side squares measured the bays of the aisles ($24: 3 = 8$ feet) around the nave and transept; in the outer corners of the corner squares, a residual part of the lesser square remained free, one of which is occupied by the octagonal chapel with four niches in the corners, which housed the sacristy and today contains the baptismal font.

With 20-foot squares inside the five 24-foot squares, the difference measures 2 feet the width of the pillars between the nave and aisles, identified by 8-foot squares. These 24-foot and 20-foot squares fit the nave's elevation and the barrel vault's impost at 16 feet. The brain of the round vault adds the 10 feet of the riser to the 16 feet of the impost ($10 + 16 = 26$ feet).

The actual measurements are slightly different and appear in the variation of the scanning of smaller squares in the scheme derived from the survey inserted into a slightly larger square. The 1-foot difference in the span of the nave compared to the transept compensates for the lack of the east aisle in the transept, redefining the theoretical layout with a 76-foot 'square'. The fake choir adds a further virtual module to the 26-foot-deep transept, which maintains the width of the initial module while the nave narrows by 1 foot; the aisles become rectangular, bringing the width of the double ambulatory flanking the nave and one side of the transept to 10 feet. The faux chancel shifts the 76-foot design square by one module, with a Greek cross in the centre and four remaining 8×8 -foot squares at the corners, one of which houses the baptismal font in an octagonal chapel, excluding the entrance module, occupied by the façade and the first two bays of the nave, which remain out of sight towards the chancel. The vision of the false chancel evokes a space equivalent to the smaller square of the transept wings, with three arches simulating the side bays. Therefore, the initial reference scheme conceived by Bramante might have been a Latin cross basilica four square long and three square wide that was simulated,

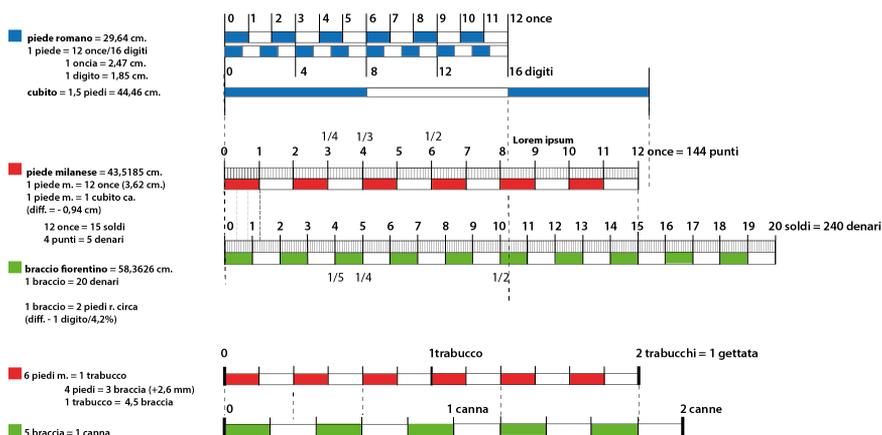


Fig. 6 Relazioni metrologiche tra sistemi locali – piede milanese e braccio fiorentino.

Metrological relationships between local systems - Milanese foot and Florentine arm.

griglia di 3 x 3 quadrati minori (24 x 3 = 72 piedi/12 trabucchi) (Fig.6).

Il quadrato minore definisce l'ampiezza dello spazio centrale del quadrato generatore, occupato dalla navata. La tripartizione dei quadrati laterali misura le campate delle navate minori (24: 3 = 8 piedi) che girano intorno a navata e transetto. Ai 4 angoli esterni dei quadrati angolari resta libera la parte residua del quadrato minore. Uno di questi è occupato dalla cappella ottagonale che ospitava la sacrestia e oggi la fonte battesimale.

Se si inseriscono quadrati di 20 piedi di lato all'interno dei 5 quadrati di 24 piedi, la differenza misura in 2 piedi la larghezza dei pilastri fra la navata centrale e le navate laterali, individuate da quadrati di 8 piedi. I due quadrati di 24 e 20 piedi definiscono rispettivamente l'alzato della navata e l'imposta della volta a botte all'altezza di 16 piedi. Il cervello della volta a tutto sesto aggiunge i 10 piedi della monta ai 16 piedi dell'imposta (10 + 16 = 26 piedi).

Le misure reali sono un po' diverse per la variazione della scansione di quadrati minori rispetto allo schema teorico, più semplice di quello definitivo, condizionato da numerosi fattori esterni e più articolato. La differenza di 1 piede nella luce della navata rispetto al transetto compensa la mancanza della navata orientale nel transetto, ridefinendo l'impianto teorico in un quadrato di 76 piedi di lato.

Il finto coro mantiene la larghezza del modulo primitivo, mentre la navata centrale si stringe di 1 piede; le campate delle navate laterali diventano rettangolari, portando a 10 piedi la larghezza del doppio deambulatorio

by constructing a building with a Tau cross plan. Perspective, capable of measuring space with mathematical rules and representing it exactly, became the tool to visualize an ideal space other than the physical one: the first example of virtual architecture.

The building's irregularities find an explanation in the dissimulation of small asymmetries. That amplifies the effectiveness of the perspective deception without denying the project's coherence to a double proportional numerical program. On the one hand, the pseudo-basilica layout of the actual masonry and, on the other, the building with a central plan centred on the cross dome that historical critics have always associated with the space perceived inside.

Number and measure. The Divine Proportion

Measure, an objective element of comparison and knowledge, had a fundamental role in the design of Renaissance architecture, as revealed by the purpose of Brunelleschi and Donatello's journey to 'measure the Roman antiquities'. Classical architecture takes on the meaning of proportion, or relationship in the sizing of the parts on the whole (Scholfield, 1958), also to guarantee the harmony of the building and, therefore, its solidity.

The Vitruvian triad 'firmitas-utilitas-venustas', underlining the importance of the relationship between 'firmitas' and 'venustas', or the eurhythmy of the parts in the whole, implies the conception of measure as a set of correct ratios rather than as a set of dimensional values independent of each other. The classical project refers to a numerical program that controls the formal articulation through measurements expressed by anthropometric modules. The architectural order is the key, decodable depending on a system of multiples and submultiples. That links the three structural-constructive-ornamental levels in a unitary system in relationship to Vitruvio's triad (Migliari, 1991). The Renaissance reinterpretation of the rule (Wittkover, 1949) adapts the modular principle of the order to local metric systems, derived differently from the classical ones, without denying the importance of the proportional principle. The gap between the ideal scheme and the actual measurements obtained with a digital survey is consistent with the premises that link the original idea to the debate on the central plan, destined to culminate in the proposals for San Pietro in Rome. There is a concatenation of numbers, which become particular in the Milanese feet measurements, documenting the progressive refinement of the project to reconcile the constraints linked to the pre-existing, the desire for a basilica space with an elongated nave and the cultural dictates of the architecture of the High Renaissance, which sought perfection in the organic dimensioning of the parts in the whole.

che costeggia la navata e un lato del transetto. Il finto coro aggiunge un ulteriore modulo virtuale di 26 piedi di profondità che ‘sposta’ di un modulo il quadrato teorico di 76 piedi, con una croce greca al centro e quattro quadrati residui di 8 x 8 piedi agli angoli, uno dei quali ospita il fonte battesimale in una cappella ottagonale; dal quadrato maggiore resta escluso il modulo dell’ingresso, occupato dalla facciata e dalle prime due campate della navata, che esulano dal campo visivo di chi guarda il coro. La prospettiva evoca così uno spazio equivalente al quadrato minore delle ali del transetto, con tre archi che simulano le campate laterali. La prospettiva, capace di misurare lo spazio con regole matematiche e rappresentarlo in modo esatto, fornisce lo strumento per visualizzare uno spazio ideale diverso da quello fisico, offrendo il primo esempio di architettura virtuale. Dall’evidenza si evince che lo schema di riferimento concepito dal Bramante potesse essere una basilica a croce latina lunga 4 quadrati e larga 3, simulata però costruendo un edificio con la pianta a croce commissa. Le irregolarità rilevate nelle misure della fabbrica trovano una spiegazione nella dissimulazione di piccole asimmetrie che amplificano l’efficacia dell’inganno prospettico senza rinnegare la coerenza del progetto ad un doppio programma numerico proporzionale. Da una parte l’impianto pseudo-basilicale della muratura reale e dall’altra l’edificio a pianta centrale incentrato sulla cupola della crociera che la critica storica ha sempre associato allo spazio percepito all’interno.

Numero e misura. La *Divina Proportione*

La misura, elemento oggettivo di confronto e conoscenza, riveste un ruolo centrale nel disegno dell’architettura rinascimentale, come rivela lo scopo del viaggio di Brunelleschi e Donatello, che partono insieme per ‘*misurare le anticaglie romane*’. Nell’architettura classica il termine assume il significato di proporzione, concetto che esprimeva la corretta relazione del dimensionamento delle parti rispetto al tutto (Scholfield 1958), a garanzia dell’armonia della fabbrica e quindi della sua stessa solidità. Così la triade vitruviana *firmitas-utilitas-venustas*, che sottolinea l’importanza della relazione tra i tre termini nell’euritmia delle parti nel tutto, sottintende la concezione della misura come un insieme di rapporti corretti più che come una serie di valori dimensionali indipendenti tra loro.

Il progetto classico è quindi riconducibile a un programma numerico che controlla l’articolazione formale attraverso misure espresse da moduli antropometrici. L’ordine architettonico (Migliari 1991) è la chiave decodificabile in relazione a un sistema di multipli e sottomultipli, che fondono i tre livelli strutturale, costruttivo e ornamentale della triade

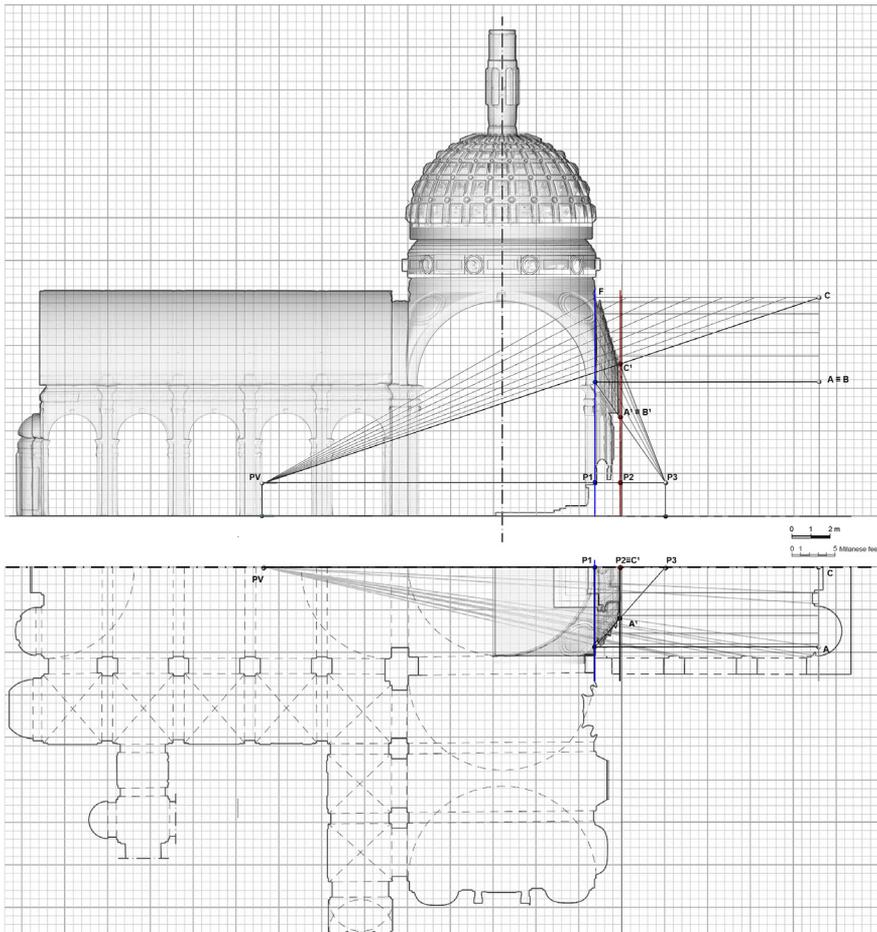


Fig. 7a Accelerated perspective projection point of the fake choir.

In Bramante's solution, the key to the search for perfection is in perspective. The latter extends the actual structure in the illusion of the choir, with an effective artifice from the entrance to the point where one begins to see the coffered dome above the transept, which induces one to turn one's gaze upwards, distracting it from the choir.

The position of the choir's perspective viewpoint is crucial to understanding the design's program complexity, which goes well beyond the development of a geometric scheme destined to become the reference of the most important church in Christianity. The viewpoint lies in the central span of the second square of the nave, at the point from which the virtual completeness of the central Greek cross space of the church is seeable (Fig.7 and Fig.7b).

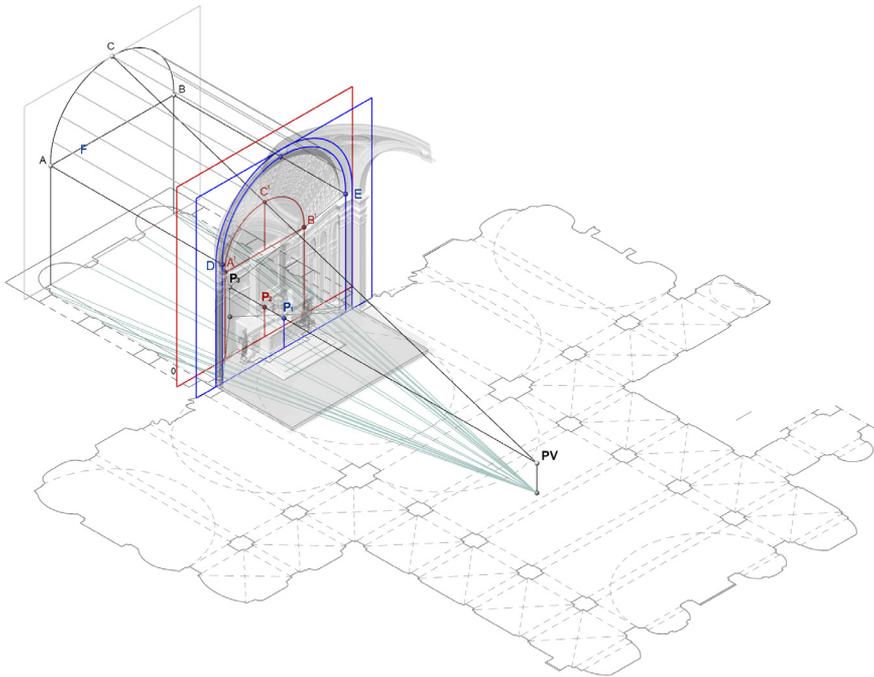


Fig. 7b Punto di proiezione della prospettiva accelerata del finto coro.

in un sistema unitario. La reinterpretazione rinascimentale (Wittkower 1949) adatta il principio modulare dell'ordine ai sistemi metrici locali, diversamente derivati da quelli classici, senza rinnegare l'importanza del principio proporzionale. Lo scarto tra lo schema ideale e le misure reali del rilievo digitale, conferma il legame con l'idea e il dibattito intorno allo sviluppo quattro-cinquecentesco della pianta centrale, destinato a culminare nelle proposte per San Pietro a Roma. La particolare concatenazione dei numeri delle misure in piedi milanesi documenta un affinamento del progetto per conciliare i vincoli delle preesistenze: la richiesta di uno spazio basilicale con la navata allungata, i dettami dell'architettura del pieno Rinascimento, che cercava la perfezione nel dimensionamento organico delle parti nel tutto e infine la sperimentazione di una nuova tipologia che mettesse l'uomo al centro di un microcosmo artificiale direttamente connesso al cielo. Bramante trova la soluzione della ricerca di perfezione nella prospettiva e grazie a essa allunga l'impianto reale nell'illusione del coro. L'artificio regge dall'ingresso sino al punto di proiezione del finto coro, da dove si comincia a vedere la grande cupola a cassettoni sopra la crociera, che induce a girare lo sguardo verso la cupola

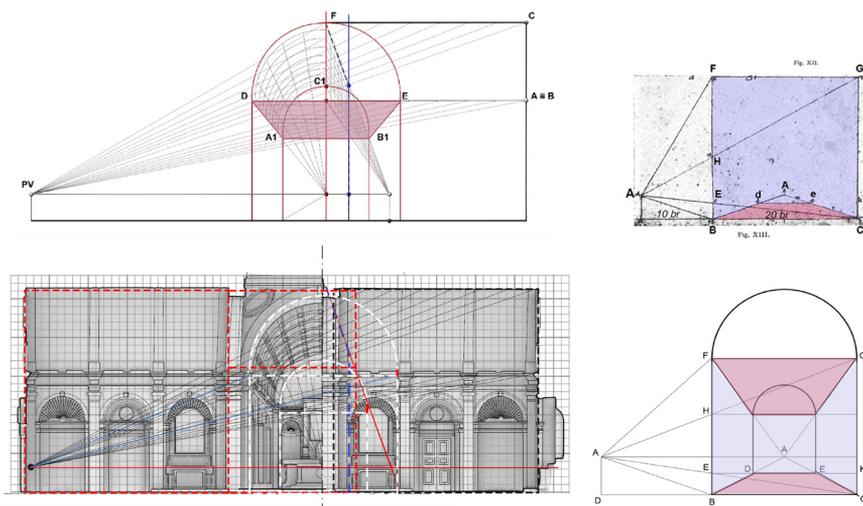


Fig. 8 Sovrapposizione dello schema di Piero della Francesca, ripreso dall'Alberti, al transetto.

Overlay of Piero della Francesca's scheme, taken from Alberti, on the transept.

According to the indications of Leon Battista Alberti (De Pictura), the viewpoint must be at a height of 3 Florentine arms ($3 \times 0.5836 = 1.7508$ meters), corresponding to the height of the eye of a robust man. Translated into Milanese feet, the height of the horizon is 4 feet ($4 \times 0.435185 = 1.74074$ meters), a measurement very close to that obtained from the inverse projection of the virtual space (Fig.8). The main point is aligned with the point of convergence of the alignments of the coffers of the false vault at a height very close to the ideal value suggested by the treatise⁶ (Fig.7). The stationpoint is 39 feet from the frontal plane of the choir; assumed as a perspective frame. This point would fall in the 'central' span of a theoretical Greek cross plan but not at its centre (Fig.9).

The fake choir's backplane lays 3 Milanese feet behind the frame. The height of the point of view is 4 feet, corresponding to the 3 Florentine arms recommended by Alberti in the De Pictura. A whole number with a meaningful value expresses the height, while the distance of the point of view does not appear to be. However, the measurement of 42 feet, equal to 7 trabucchi (1 trabucco = 6 feet) that separates the point of view from the back wall of the choir. This could be the actual position of the painting

⁶ Three Florentine arms according to Leon Battista Alberti's De Pictura (1436), corresponding to 4 Milanese feet.

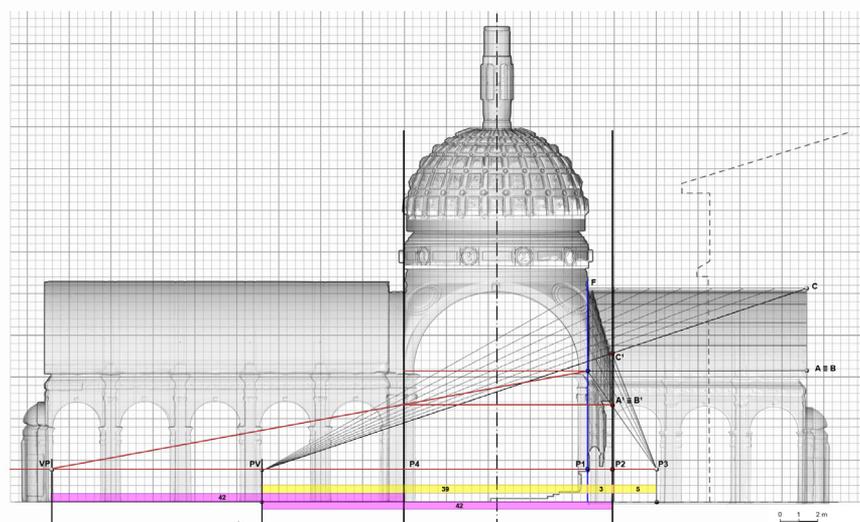
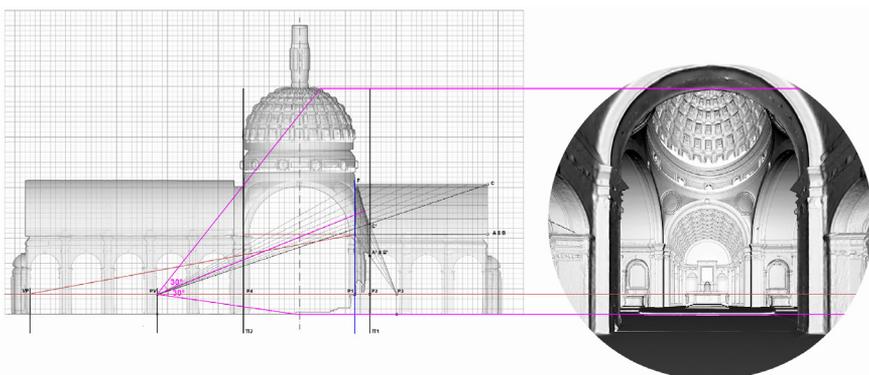


Fig. 9 Cono visivo dal punto di proiezione del coro (*sopra*), punti di stazione della proiezione del coro e di collimazione della doppia prospettiva (*sotto*).

Cone of vision from the choir projection point (above), station points of the choir projection and collimation of the double perspective (below).

distogliendo dalla dissoluzione dell'inganno. La posizione di questo punto rivela la complessità del programma di progetto, che travalica lo sviluppo di uno schema geometrico destinato a diventare il riferimento della chiesa più importante della cristianità. Il punto di vista si trova nella campata centrale del secondo quadrato della navata, in un punto dal quale è possibile apprezzare la completezza virtuale dello spazio centrale a croce greca della chiesa (Fig.7 e Fig.7b).

Leon Battista Alberti (*De Pictura*) fissa la posizione corretta del punto di vista alla quota di 3 braccia fiorentine ($3 \times 0,5836 = 1,7508$ metri), corrispondente all'altezza dell'occhio di un uomo robusto. Tradotto in piedi



Fig. 10 Disallineamento della prospettiva di coro e navata
Misalignment of choir and nave perspective

in Bramante's project, who must have known that the translation of the painting does not change the perspective. The longitudinal section of the relief shows a significant recurrence in the measurements of the church, 26 feet away from the projection point of the chancel, the same distance that separates the bottom plane of the chancel from the plane between the cross and the bay. From this particular point, the depth lines of the nave and choir collide (Fig.10 and Fig.11). The measurements highlight a series of meaningful numbers in a golden progression. But there are other particularities. By adapting Alberti's quadrangolus, taken from Piero della Francesca's Exercise XIII to the measurements of the cross-section, one observes how the reconstruction of the point of view from the virtual depth of the chancel places it one foot beyond the threshold of the Sacello di San Satiro, 36 (26+10) feet from the axis of the chancel, while the privileged point of the dynamic anamorphosis along the nave is just beyond the doorway (Buratti, Mele, Rossi 2021). There is a significant analogy between the projective situation in the nave and the transept. Thus, the perceived space of those entering the transept from the sacellum is the same as those approaching along the nave, materialising the impression of a central space despite the difference in actual length.

The superposition of the longitudinal section with a grid of Milanese feet validates the result in the evidence of numbers that are too particular to be due to chance. The reference to the theoretical measurement supports

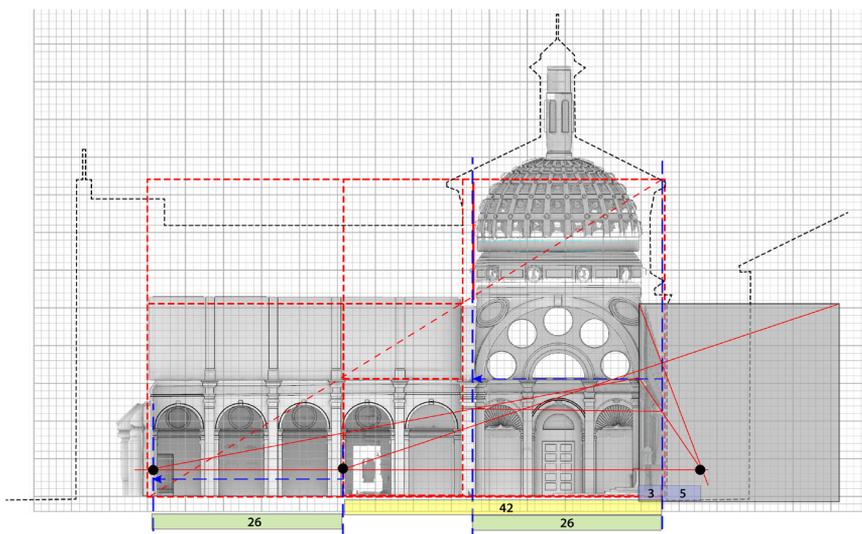


Fig. 11 Relazioni auree dell'impianto prospettico
Gold relations of the perspective system

milanesi, la misura vale 4 piedi ($4 \times 0,435185 = 1,74074$ metri), misura molto vicina a quella ricavata dal rilievo con la proiezione inversa dallo spazio virtuale previsto dal riferimento teorico, ipotizzando la profondità del coro equivalente a quella del braccio del transetto (Fig.8).

Il punto principale, alla stessa quota, corrisponde al punto di concorso degli allineamenti dei lacunari della finta volta, a una quota vicina al valore ideale suggerito dalla trattatistica⁶. Il punto di vista si trova a 39 piedi milanesi dal piano frontale del coro, presupposto come quadro prospettico. Esso non è al centro della campata centrale del braccio di una teorica pianta a croce greca, ma dove è possibile apprezzarne meglio lo spazio, secondo quella che Robbiani individua secondo un'intenzione progettuale (Robbiani 1980) (Fig.9).

Il piano di fondo del finto coro dista 3 piedi milanesi dal quadro.

La distanza del punto di vista dal quadro assunto sul piano anteriore del coro non presenta una misura significativa, ma lo è la misura di 42 piedi, pari a 7 trabucchi (1 trabucco = 6 piedi) che separa il punto di vista dalla parete di fondo del coro. Questa potrebbe essere la posizione effettiva del quadro nel progetto di Bramante, che doveva sapere che la traslazione del quadro non cambia la prospettiva. Infatti la sezione longitudinale del rilievo mostra una ricorrenza significativa nelle misure della chiesa, a 26

⁶ Tre braccia fiorentine secondo il *De Pictura* di Leon Battista Alberti (1436), corrispondenti a 4 piedi milanesi.

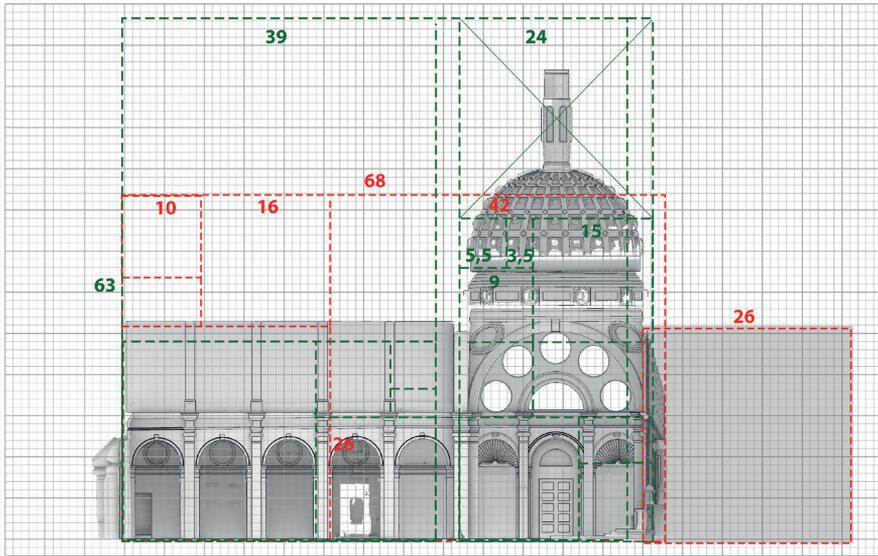


Fig. 12 Relazioni auree dell'impianto prospettico
Gold relations of the perspective system

the correctness of the positioning obtained by interpolation of the different possible alignments at 42 feet from the back of the fake choir. (Fig.10) In the absence of written documents the perfection of the numbers is the only possible verification of a position that is difficult to determine due to the asymmetry of the choir and the slight misalignment concerning the nave, which 'shift' the point of view of the two halves. The total lack of perspective references on the floor, due to the conscious elimination of the bases of pillars and pilasters, helps conceal the deception throughout the approach from the entrance to the privileged point.⁷ There is, therefore, a double perspective, a particular anamorphosis from centres aligned on the longitudinal axis of the church, which once again reveals the identification of meaningful positions and proportions.

The significant measurements of the double perspective scheme define the length of the nave and its proportional framing in the section, with measurements in the golden ratio, which, read in the (hypothetical) metric unit of the project, fit into a numerical series of harmonic quantities that measure the building:

⁷ *The asymmetry between the two halves contributes to widening the zone of effectiveness of the perspective effect with respect to the axis of the nave, because the error 'multiplies' the possible points of view.*

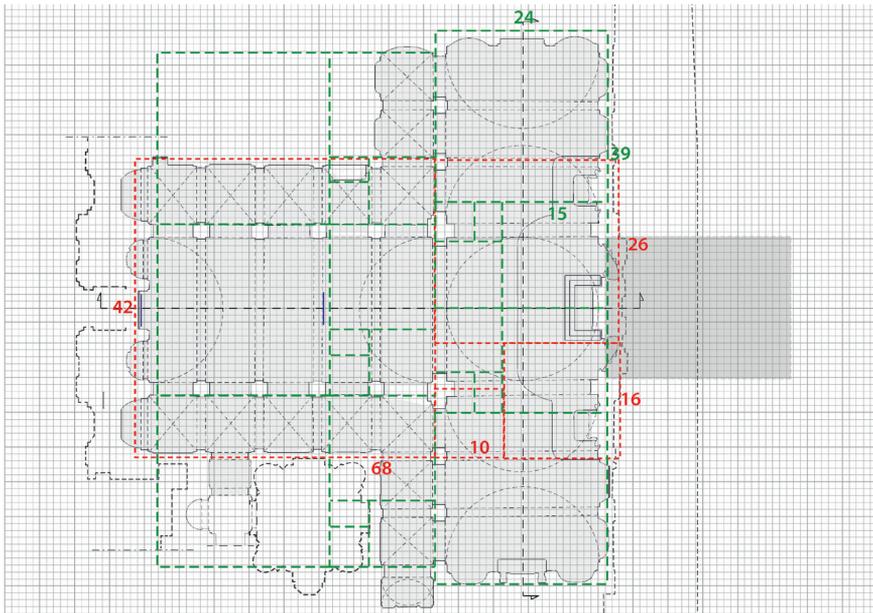
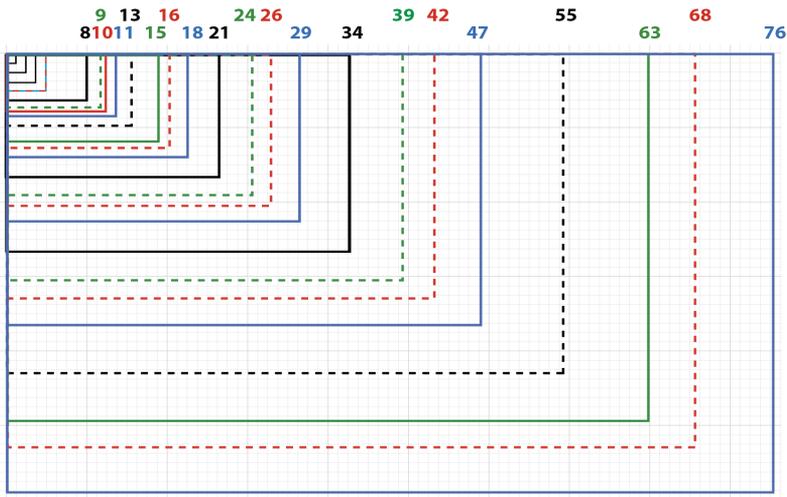


Fig. 13 Relazioni auree dell'impianto prospettico
Gold relations of the perspective system

iedi di distanza dal punto di proiezione del coro, la stessa distanza che separa il piano di fondo del coro dal piano tra la crociera e la campata. Da questo punto particolare collimano le rette di profondità della navata e del coro (Fig.10 e Fig.11). L'insieme delle misure mette in risalto una serie di numeri significativi in progressione aurea. Ma ci sono altre particolarità. Adattando il *quadrangolus* albertiano, ripreso dall'esercizio XIII di Piero della Francesca, alle misure della sezione trasversale, si osserva come la ricostruzione del punto di vista dalla profondità virtuale del coro, lo collochi un piede oltre la soglia del Sacello di San Satiro, a 36 (26+10) piedi dall'asse del coro, mentre il punto privilegiato dell'anamorfose dinamica lungo la navata è appena oltre il portone (Rossi, Mele, Buratti 2021). C'è un'analogia significativa tra la situazione proiettiva nella navata e nel transetto. Così lo spazio percepito di chi entra nel transetto dal sacello è lo stesso di chi si avvicina lungo la navata, materializzando l'impressione di uno spazio centrale nonostante la diversa lunghezza reale.

La sovrapposizione delle sezioni di rilievo con una griglia di piedi milanesi conferma il posizionamento ricavato per interpolazione dei diversi allineamenti possibili a 42 piedi dal fondo del finto coro e convalida la ricostruzione prospettica nell'evidenza di numeri interi significativi, troppo particolari per essere dovuti al caso (Fig.10).



1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 ...	Fibonacci
1 - 3 - 4 - 7 - 11 - 18 - 29 - 47 - 76 ...	Lucas
2 - 4 - 6 - 10 - 16 - 26 - 42 - 68 ...	prospettiva
3 - 3 - 6 - 9 - 15 - 24 - 39 - 63 ...	crociera

Fig. 14 Serie armoniche rinvenibili nell'impianto di Santa Maria in San Satiro
Harmonic series traceable in the Santa Maria in San Satiro layout

- 6 feet, the span of the minor nave.
- 10 feet, the width.
- 16 feet, the double module that completes the transept.
- 26 feet, the depth of the theoretical arm of the Greek cross and of the path where the dynamic effect of the correct perception appears (Buratti et al 2021) with the movement of the observer from the privileged point at the entrance to the point of view that projects the choir, beyond which the artifice dissolves.
- 42 feet, the actual length of the nave.
- 68 feet, the total length of the interior.

The verification documents some adaptation of the exact proportion to the whole measure, but the overall design is based on golden ratios. The plan and sections of the church reveal the recurrence of measures attributable to 3 different harmonic series based on the same Fibonacci principle but with different beginnings (Fig.12 and Fig.13). Among these, the Lucas series, which is the one that best resolves the otherwise approximate golden ratio (Fig.14).

In mancanza di documenti scritti, la perfezione dei numeri è l'unica verifica possibile di un punto altrimenti difficile da determinare per l'asimmetria del coro e il disassamento della navata, che 'spostano' il punto di vista delle due metà. La totale mancanza di riferimenti prospettici sul pavimento per la consapevole eliminazione delle basi di pilastri e paraste, contribuisce a dissimulare l'inganno, che regge lungo tutto il percorso di avvicinamento dall'ingresso al punto privilegiato⁷.

Esiste quindi una doppia prospettiva, quindi un particolare tipo di anamorfosi con centri allineati sull'asse longitudinale della chiesa, che determina l'efficacia dell'inganno lungo tutto la navata (Fig.18), individuando ancora una volta posizioni e proporzioni significative. Le misure del doppio schema prospettico che allinea le rette di profondità del finto coro con quelle della navata ne definiscono la lunghezza e l'inquadramento nella sezione longitudinale con misure in rapporto aureo, che lette nell'unità di progetto, si inquadrano in una serie numerica di grandezze armoniche che misura l'edificio:

- 6 piedi la luce della campata della navata minore,
- 10 piedi la sua larghezza
- 16 piedi il doppio modulo che completa il transetto,
- 26 piedi la profondità del braccio teorico della croce greca e del percorso nel quale si genera l'effetto dinamico della percezione corretta (Buratti, et al. 2021) con lo spostamento dell'osservatore dal punto privilegiato all'ingresso sino al punto di vista che proietta il coro, oltre il quale l'artificio si dissolve,
- 42 piedi la lunghezza reale della navata,
- 68 piedi la lunghezza totale dell'interno.

Questa successione numerica rivela un adattamento della proporzione esatta alla misura intera, senza contraddire la volontà di improntare il disegno d'insieme sul rapporto aureo. Pianta e sezioni della chiesa rivelano la ricorrenza di misure riconducibili a 3 serie armoniche (Fig.12 e Fig.13) (la serie di Lucas è la meno approssimata) basate sullo stesso principio di Fibonacci, ma con inizio diverso (Fig.14).

⁷ L'asimmetria tra le due metà contribuisce ad allargare la zona di efficacia dell'effetto prospettico rispetto all'asse della navata, perché l'errore 'moltiplica' i possibili punti di vista.

HISTORY. BEFORE AND AFTER BRAMANTE

The church before Bramante

As early as the 5th century, a small chapel annexed to a cemetery seems to have existed close to the transept of the present-day Church of St Mary (a painted tomb fragment was found here). The presence of earlier architecture is poorly documented and often coincides with the legends of ancient historiography about how a Christian basilica replaced a temple dedicated to Jupiter. More reliable sources date back to the 9th century, when archbishop Ansperto da Biassono⁸, of noble Lombard lineage, promoted the construction of a centrally planned shrine on a plot of land he owned. The building is dedicated to the brothers of Sant' Ambrogio, San Satiro and San Silvestro. Still, the small church continues to be committed in later official documents only to San Satiro. Later, the building was annexed to the church of Santa Maria, becoming the Cappella della Pietà. The building complex, which also includes accommodation for the monks, the bell tower and the xenodochium on Via Falcone, is mentioned in documents of the time as being under the control of the monastery of St Ambrose. The bell tower is recognised, along with that of Sant' Ambrogio, as the oldest in Milan, so much so that it could be a model for later Lombard Romanesque buildings. There is no lack of recovered stone material of Roman and early Christian origin (pluteus with affronted peacocks) inserted in the wall face of the basement on the side facing Via Speronari. In addition to being a bell tower, the building was also an orientation point for pilgrims on their way to the xenodochium.

In 1036, as reported in the annals, the church was consecrated by Bishop Ariberto d'Intimiano, a fact that suggests either a reconsecration following the officiating of excommunicated priests or, more probably, due to heavy remodelling due to its poor state of preservation. The bell tower, decorated with thick string-course arches and punctuated by large openings, was still remodelled, perhaps by the will of Ariberto himself or after the violent city fire of 1070.

The first document suggesting the formation of the ecclesiastical district

⁸ *Archbishop of Milan from 868 to 881, probably a member of the Milanese aristocratic Confalonieri family. The foundation date of the shrine is known from the so-called Cronaca Chronicle of Pseudo-Goffredo da Bussero (see La Cronaca, edited by Grazioli, 1906, pp. 211-245), which places it in the year 876, citing the archbishop as the patron and the dedication to Saints Sylvester and Satyrus. The confirmation of Ansperto's specific will in the construction of the church is evidenced by his two wills of 10 September 879 and 11 November of the same year (see Codex diplomaticus Langobardiae, 1873, coll. 482-486; coll. 490-495).*

LA STORIA. PRIMA E DOPO BRAMANTE

La chiesa prima di Bramante

Già nel V sec. in un'area a pascolo, sembra esistesse una cappelletta annessa a un cimitero in una zona prossima al transetto dell'attuale chiesa di Santa Maria (qui è stato rinvenuto un frammento di tomba dipinto). La presenza di architetture antecedenti è scarsamente documentata e spesso coincide con le leggende della storiografia antica che narrano di come un tempio dedicato a Giove fosse stato sostituito da una basilica cristiana.

Fonti più attendibili risalgono al IX sec., quando l'arcivescovo Ansperto da Biassono⁸, di nobile stirpe longobarda, promuove la costruzione di un sacello a pianta centrale in un lotto di sua personale proprietà. La costruzione è dedicata ai fratelli di Sant'Ambrogio, San Satiro e San Silvestro, ma la chiesetta continua a essere dedicata nei documenti ufficiali solamente a San Satiro. Successivamente la costruzione è annessa alla chiesa di Santa Maria, divenendo la Cappella della Pietà.

Il complesso edilizio, comprendente anche un alloggio per i monaci, il campanile e lo xenodochio su Via Falcone, risulta dai documenti del tempo alle dipendenze del monastero di Sant'Ambrogio. La torre campanaria è riconosciuta, con quella di Sant'Ambrogio, come la più antica di Milano, tanto da essere un modello per i successivi edifici del romanico lombardo. Non manca il materiale lapideo di recupero, di origine romana e paleocristiana (pluteo con pavoni affrontati), inseriti nel paramento murario del basamento sul lato verso via Speronari. Oltre che campanile, l'edificio risulta essere un vero e proprio punto di orientamento, per i pellegrini diretti allo xenodochio.

Nel 1036, come riportato dagli annali, la chiesa viene consacrata dal vescovo Ariberto d'Intimiano, fatto che fa pensare o ad una riconsacrazione in seguito all'officiare di preti scomunicati o, più probabilmente, a causa dei pesanti rifacimenti dovuti al cattivo stato di conservazione. Il campanile, decorato con fitta archeggiatura marcapiano e punteggiato da ampie aperture, viene ancora rimaneggiato, forse per volontà dello stesso Ariberto o dopo il violento incendio cittadino del 1070.

⁸ Arcivescovo di Milano dall'868 all'881, probabilmente membro della famiglia aristocratica milanese dei Confalonieri. La data di fondazione del sacello è nota dalla cosiddetta Cronaca dello Pseudo-Goffredo da Bussero (si veda *La Cronaca*, edita da Grazioli, 1906, pp. 211-245), che la colloca nell'anno 876, citando l'arcivescovo come committente e la dedizione ai Santi Silvestro e Satiro. La conferma della volontà specifica di Ansperto nella costruzione della chiesa è testimoniata dai suoi due testamenti del 10 settembre 879 e dell'11 novembre dello stesso anno (si veda *Codex diplomaticus Langobardiae*, 1873, coll. 482-486; coll. 490-495).

dates back to 1209,⁹ when the property is no longer mentioned as the property of the monastery of St Ambrose but as the responsibility of the church priest. The document also confirms the presence of a canonical house on whose wall, facing today's *Via del Falcone*, is painted the image of the Virgin and Child, inextricably linked to the construction of the church itself. Chronicles report how, on the Annunciation Day of 1242, a certain Massazio da Vigonzone, angry because of a considerable loss of money at dice and having come across the image of the Virgin with the Infant in her arms, attacked the sacred icon, stabbing the child in the throat. Living blood spilt from the painting and smeared the image and the face of the wounded man. It was precisely the desire to protect the miraculous image that led – after a confraternity dedicated to St. Mary was established for this purpose – to the construction of a new church next to the shrine of St. Satyrus to preserve the painting, which can still be seen above the main altar today.

The oldest documents attesting the course of works for the building dedicated to Santa Maria date back to 1478. On that date, the Confraternity, or *Scuola di Santa Maria*, who commissioned the building, purchased the neighbouring *Osteria del Falcone* to construct the church¹⁰, the building site for which had already begun.

Finally, in June 1479, a large sum of offerings were collected thanks to the interest of Bona di Savoia and Gian Galeazzo Maria Sforza, who were interested in protecting the miraculous painting and ensuring the continuation of the work and completion of the church in the shortest possible time.

Bramante's church

Donato Bramante from the Marche region of Italy appears for the first time in 1482 in the documentation of the building site. Still, his presence can probably be traced back to the previous year. He arrived in Milan in 1477 after working as a painter in Marche and Bergamo, strongly influenced by the works of Francesco di Giorgio in Urbino and Leon Battista Alberti in Mantua.

It is difficult to identify the stage of construction when Bramante arrived. Probably at least part of the dome and transept had already been built¹¹, but this did not prevent the artist from interpreting the building site in a

⁹ APSS, *Origine, privilegi e storia*, 1; *Palestra*, 1983, p. 33.

¹⁰ Buratti Mazzotta Adele. *Insula Ansperti*. Il complesso monumentale di San Satiro. Ed. Silvana Editoriale, 1992.

¹¹ The hypothesis would be supported by a contract dated 1482 in the name of Marco Lombardi and Matteo Fedeli to construct and install a sumptuous wooden tabernacle, which was later lost.

Il primo documento che lascia intendere la formazione della circoscrizione ecclesiastica risale al 1209⁹, anno in cui i beni non sono più citati come proprietà del monastero di Sant'Ambrogio, ma come responsabilità del sacerdote della chiesa. Il documento conferma inoltre la presenza di una casa canonica sul cui muro, esposto verso l'attuale via del Falcone, è dipinta l'immagine della Vergine con Bambino, indissolubilmente legata alla costruzione della chiesa stessa. Riportano infatti le cronache come nel giorno dell'Annunciazione del 1242, un certo Massazio da Vigonzone, adirato a causa di un'ingente perdita di denaro ai dadi e imbattutosi nell'immagine della Vergine col l'Infante tra le braccia, si avventò contro la sacra icona pugnalandolo il bambino alla gola. Dal dipinto fuoriuscì sangue vivo che imbrattò l'immagine e il viso del feritore. Sarà proprio la volontà di proteggere l'immagine miracolosa a portare – dopo che a tal scopo fu istituita anche una confraternita dedicata a Santa Maria – alla costruzione, accanto al sacello di San Satiro, di una nuova chiesa destinata a preservare il dipinto, ancora oggi visibile sopra l'altare principale.

Al 1478 risalgono i documenti più antichi che attestano il corso delle opere per la fabbrica dedicata a Santa Maria. In quella data la Confraternita, o Scuola di Santa Maria, committente dell'edificio, acquista la limitrofa Osteria del Falcone per l'edificazione della chiesa¹⁰, il cui cantiere risulterebbe già cominciato.

Nel giugno del 1479 infine, sono raccolte una grande quantità di offerte grazie all'interessamento di Bona di Savoia e Gian Galeazzo Maria Sforza, interessati alla protezione del dipinto miracoloso e ad assicurare la prosecuzione dei lavori e il completamento della chiesa nel minor tempo possibile.

La chiesa di Bramante

Il marchigiano Donato Bramante compare per la prima volta nel 1482 tra la documentazione del cantiere, ma è probabile che la sua presenza si possa anticipare già all'anno precedente. Giunge infatti a Milano nel 1477, dopo aver lavorato come pittore nelle Marche e a Bergamo, fortemente influenzato dalle opere di Francesco di Giorgio a Urbino e di Leon Battista Alberti a Mantova. Difficile identificare lo stadio costruttivo all'arrivo di Bramante. Probabilmente almeno una parte della cupola e del transetto era già stata costruita,¹¹ ma ciò non impedisce all'artista di interpretare in maniera del

⁹ APSS, *Origine, privilegi e storia*, 1; Palestra, 1983, p. 33.

¹⁰ Buratti Mazzotta Adele. *Insula Ansperti. Il complesso monumentale di San Satiro*. Ed. Silvana Editoriale, 1992.

¹¹ L'ipotesi sarebbe suffragata dal contratto datato 1482 intestato a Marco Lombardi e Matteo Fedeli per la realizzazione di un sontuoso tabernacolo ligneo, andato successivamente disperso.

completely new way by orienting the high altar towards Via Falcone, thus creating a larger space for the faithful and allowing the entrance towards Via Torino. The addition of the nave and aisles, the sacristy and the famous false choir, which plays such a large part in this book, are also his.

Thanks to Bramante's work and Leonardo's contemporary reflections, architecture encountered central Renaissance themes in Milan for the first time. A commissa cross, or tau, characterises the design for San Satiro plan, facing southeast. To prevent the lack of space due to the presence of Via del Falcone, Bramante invented the faux perspective choir: a structure in brick, wood, terracotta and painted stucco, which simulates three bays identical to the real ones in the nave, creating the illusion of a real apse in a depth of only 97 cm. The chancel presents a decorative score with a coffered barrel vault composed of three arches identical to the nave. It terminates in a perspective illusion of a counter façade in the side parts of which there are two niches crowned with shells, while the lunette is frescoed with the miraculous episode of the bleeding of the painting.

The main body of the church is divided into three naves, the side naves being narrower than the central one. On cruciform pillars without a base and decorated with Corinthian capitals is set the majestic sequence of full-centred arches separating the naves, surmounted by a fine moulded cornice; the roof of the central nave is punctuated by the succession of barrel vaults decorated with false lacunars, while the side naves are cross-vaulted. The plan develops into a wide transept on the northern side, where the side naves turn at right angles. On the opposite side, which contains the famous faux perspective choir, flat and concave niches with shell motifs alternate, similar to those carved out on the left side of the Prevedari engraving; in St. Mary's, they pretend the existence of a side aisle also on the south side of the transept. Above the nave and transept intersection is a solemn hemispherical dome set on pendentives, decorated with gold and blue lacunars and lit by a small lantern. In the tondi of the pendentives, the Evangelists are painted, the work of a Lombard from the late 15th century; the decorative band at the base of the dome, punctuated by terracotta tondi with heads of prophets, is the work of De Fondulis.

Although the church thus described today appears to be a unitary and stylistically homogenous structure thanks to the solid Bramante-esque connotation, and despite the wealth of documentary information, numerous problems remain in the reconstruction of the various phases of growth of the building site, the interpretation of which is further complicated by the integrative interventions carried out in the 19th

tutto inedita il cantiere orientando l'altare maggiore verso via Falcone, per creare così uno spazio maggiore per i fedeli e consentire l'ingresso verso via Torino. Sue sono anche l'aggiunta delle navate minori e della navata centrale, della sacrestia e del celebre finto coro, che tanta parte ha in questo libro.

Grazie all'attività di Bramante, e alle contemporanee riflessioni di Leonardo, l'architettura per la prima volta incontra a Milano i temi cruciali del Rinascimento. Il progetto per San Satiro è caratterizzato da pianta a croce commissa, o a *tau*, orientata a sud-est. Per ovviare alla mancanza di spazio dovuta alla presenza di via del Falcone, Bramante inventa il finto coro prospettico: una struttura in mattoni, legno, terracotta e stucco dipinto, che simula tre campate identiche a quelle reali della navata centrale, creando l'illusione di una vera abside in una profondità di soli 97 cm. Il coro presenta uno spartito decorativo con volta a botte a cassettoni composta da tre arcate in maniera identica all'aula e termina nell'illusione prospettica in una controfacciata nelle cui parti laterali sono presenti due nicchie coronate da conchiglie, mentre nella lunetta è affrescato l'episodio miracoloso del sanguinamento del dipinto.

Il corpo principale della chiesa è suddiviso in tre navate, di cui le laterali più strette della centrale. Su pilastri cruciformi privi di base e ornati con capitelli corinzi è impostata la maestosa sequenza delle arcate a pieno centro che separano le navate, sovrastate da una fine cornice modanata; la copertura della nave principale è ritmata dalla successione delle volte a botte decorate a finti lacunari, mentre le navate laterali sono coperte a crociera. La pianta si sviluppa in un ampio transetto, sul cui lato settentrionale risvoltano, girando ad angolo retto, le navatelle laterali. Sul lato opposto, che contiene il celebre finto coro prospettico, si alternano nicchie piatte e concave con motivi a conchiglia, sul tipo di quelle scavate nella parte sinistra dell'incisione Prevedari; in Santa Maria esse fingono l'esistenza di una navatella laterale anche sul lato meridionale del transetto. Sopra l'incrocio tra navate e transetto si apre una solenne cupola emisferica impostata su pennacchi, decorata a lacunari in oro e azzurro e illuminata da una piccola lanterna. Nei tondi dei pennacchi sono dipinti gli Evangelisti, opera di un lombardo della fine del Quattrocento; spetta invece al De Fondulis la fascia decorativa alla base della cupola, scandita da tondi in terracotta con teste di Profeti.

Sebbene la chiesa così descritta appaia oggi come struttura unitaria e stilisticamente assai omogenea grazie alla forte connotazione bramantesca, e nonostante la ricchezza delle notizie documentarie, numerosi restano i problemi aperti nella ricostruzione delle diverse fasi di crescita del cantiere, la cui lettura risulta ulteriormente complicata dagli interventi integrativi

century (the main ones in 1819 and the 1930s by Felice Pizzogalli, and then in the 1950s and 1970s with the work supervised by Vandoni).

The ancient sacellum of San Satiro, characterised by a cruciform structure and a polylobed external development, was entirely redeveloped in the second half of the 15th century to be stylistically harmonised with the new construction: at first with the setting of an octagonal small tiburietto with a high lantern, decorated in the Lombard style and the result of an intervention to be placed between 1458 and 1483, then probably the work of Bramante.

The current entrance to the sacristy and the baptismal font are due to the 19th-century intervention of Vandoni, who also worked on the façade towards Via Torino (1871), which Amadeo had just begun. Bramante had probably also envisaged an external façade and the plinth realised by Amadeo could have been based on his design, but Vandoni's intervention replaced the original work. In any case, it is undeniable that the current layout of the building shows a profoundly Bramanteesque architectural language, which laid the foundations for the renewal of Milanese architecture in a classical and Renaissance sense.

attuati nell'Ottocento (i principali nel 1819 e negli anni Trenta a opera di Felice Pizzagalli, quindi negli anni Cinquanta e Settanta con i lavori curati dal Vandoni).

L'antico sacello di San Satiro, caratterizzato dalla struttura cruciforme e da uno sviluppo esterno polilobato, fu interamente riqualficato nel secondo Quattrocento, per essere stilisticamente armonizzato alla nuova costruzione: dapprima con l'impostazione di un tiburietto ottagonale dall'alta lanterna, decorato alla lombarda e frutto di un intervento da collocare tra il 1458 e il 1483, quindi a probabile opera di Bramante.

L'attuale ingresso alla sagrestia e il fonte battesimale si debbono all'intervento ottocentesco del Vandoni, il quale si occupò pure della realizzazione della facciata verso via Torino (1871), appena cominciata dall'Amadeo. Bramante aveva probabilmente previsto anche una facciata esterna ed il basamento realizzato da Amadeo avrebbe potuto ricalcare il suo progetto, sennonché l'intervento del Vandoni sostituì l'opera originale.

È in ogni caso innegabile che l'assetto attuale dell'edificio mostri un linguaggio architettonico profondamente bramantesco, che pone le basi per il rinnovamento dell'architettura milanese in senso classico e rinascimentale.

THE PERSPECTIVE

The perspective illusion

Since the beginning of the fifteenth century, when Brunelleschi, in Florence, arrived at a methodological procedure for describing buildings in perspective, the advancement of the science of perspective has led scholars and painters to develop, adopt and multiply a series of procedures and applications that have produced different perspective representations that constitute a typically Italian paradigmatic heritage.

The geometric procedures, circulated in various Italian regions, show in Lombardy a wealth only partially investigated by the architect, custodian of historical, architectural and perspective knowledge that allows to show, through the analysis of measurements developed ad hoc, the geometric paradigms used in the Lombardy area from the second half of the fifteenth century onwards. In Milan, there are several paradigmatic examples of paintings that represent architecture in perspective; one of these is certainly the painting of the Last Supper by Leonardo Da Vinci, which is located in the refectory of the Convent of Santa Maria delle Grazie. A second paradigmatic example is the solid perspective¹³ of the fake choir of Santa Maria at San Satiro created by Bramante. These two famous examples were of fundamental importance for the development of perspective science in the Lombardy area and are two fundamental geometric models produced by two artists from two important areas of perspective development, Bramante in Urbino and Leonardo in Florence. These two artefacts constitute the exempla: the first establishes the ideal foundations from which the perspective work that contains the called halved viewpoint descends; the second establishes the fundamental variables to create a perfect deception through the admirable artifice, merging the real space of the central nave of the church with the artificial one of the choir. Both examples lead to an important consideration that focuses attention on the proportional relationships between the width of the perspective frame, the distance of the observer from the frame and the object of the perspective. In the Last Supper, Leonardo specifies the terms of similarity, one of the fundamental properties for subsequent theoretical developments, and he does so with the approach of the scholar who says that perspective 'non è altro che sapere bene figurare lo ufizio'¹⁴.

¹³ *A three-dimensional sculptural perspective that contracts a real space into a smaller one to construct the perceptual fiction of a larger real space, an architectural scenography.*

¹⁴ *Cit. Da Vinci, L., Manuscript A, Sheet 3, recto.*

LA PROSPETTIVA

L'inganno prospettico

Dall'inizio del Quattrocento, quando Brunelleschi, a Firenze, pervenne a un procedimento metodologico per descrivere gli edifici in prospettiva, l'avanzamento della scienza prospettica ha portato studiosi e pittori a sviluppare, adottare e moltiplicare procedimenti e applicazioni. Questi studi hanno successivamente prodotto una serie di rappresentazioni prospettiche che costituiscono da sempre un patrimonio paradigmatico tipicamente italiano. I procedimenti geometrici, circolati in varie regioni italiane grazie ai trattatisti, mostrano in Lombardia una ricchezza solo in parte indagata dall'occhio critico dell'architetto. Questi è depositario delle conoscenze di natura storica, tecnologica e prospettica che consentono di mostrare, attraverso l'analisi di misurazioni sviluppate *ad hoc*, i modelli geometrici adoperati in area lombarda dalla seconda metà del Quattrocento in poi.

A Milano si trovano diversi esempi esemplari di pitture che rappresentano architetture in prospettiva. Uno di questi è sicuramente il dipinto dell'ultima Cena di Leonardo Da Vinci che si trova nel refettorio del convento di Santa Maria delle Grazie. Un secondo esempio di livello è la prospettiva solida¹³ del finto coro di Santa Maria presso San Satiro realizzato da Bramante. Questi due celebri esempi sono stati di fondamentale importanza per lo sviluppo della scienza prospettica in area lombarda e sono, senza ombra di dubbio, due modelli geometrici fondamentali prodotti da due artisti provenienti da importanti aree di sviluppo della prospettiva, quella urbinata di Bramante e quella fiorentina di Leonardo. I due artefatti costituiscono gli *exempla*: il primo stabilisce i fondamenti ideali da cui discende l'opera prospettica che contiene il punto di vista detto dimezzato; il secondo stabilisce le variabili fondamentali per realizzare attraverso il 'mirabile artificio' un inganno perfetto, fondendo lo spazio reale della navata centrale della chiesa con quello artificiale del coro. Entrambe le opere portano a un'importante considerazione che pone l'attenzione sui rapporti di proporzionalità fra larghezza del quadro prospettico, distanza dell'osservatore dal quadro e oggetto della prospettiva. Leonardo nel Cenacolo precisa i termini della similitudine, una delle proprietà fondamentali per i successivi sviluppi teorici, e lo fa con l'impostazione dello studioso che dice che la prospettiva '*non è altro*

¹³ Una prospettiva tridimensionale scultorea che contrae uno spazio reale in uno più piccolo per costruire la finzione percettiva di uno spazio reale più ampio, una scenografia architettonica.

In the fake choir of Santa Maria at San Satiro, Bramante instead identifies the possibility to contract the space by scientifically forcing it between two planes, the framework and the background plane, and he does so by generating a double proportionality: between the frame and the distance of the observer and between the background plane, the distance of the observer and the frame. These proportionalities that we often call coincidences are the reciprocal positions of the elements scientifically placed. After the careful study of these two works, the term perspective is used here in the sense of ars perspectiva, from that perspicere¹⁵ already used by Boethius, which indicates to us the principles that have followed one another to represent the depth of infinite space through number, proportionality and the measurement.

Milan preserves an extraordinary testimony of the innovative talent of two of the most significant protagonists of the Renaissance, called upon by Ludovico il Moro, who produced the first two geometric models fundamental to the advancement of the ars perspectiva in the city of Milan. The solid perspective of the false choir of Santa Maria at San Satiro conceived by Bramante is certainly an important moment in the advancement of the science of perspective.

To contract the space in the scenographic fiction it is necessary to refer to the relationship between the variables of the accelerated perspective: the relative position of the viewpoint, of the framework and of the 'background plane' π_1 parallel at the framework. The contraction of the conceived architecture depends on the position of this plan. Once the depth to be contracted is known and the position of the framework π and the viewpoint PV have been decided, the second plane parallel to the framework is fixed at a distance of 3 feet (depth of survey of the accelerated perspective of the fake choir) and the notable points A, B, C are joined with the viewpoint: the alignments intersect the plane π_1 parallel to π , identifying the points A1, B1, C1. By joining these points with the corresponding ones on the framework D, E, F, the segments A1D, B1E and C1F are determined, whose extensions intersect in P3, which is the point of convergence of the parallels to the segments described by the coffers of the contracted vault. Once these four elements and the metric procedure that links them have been identified, it is easy to obtain all the points of the solid perspective (Fig. 15).

The construction tracing of the wooden formwork which has a horizontal floor, may have been done to scale or real on the floor, reporting in plan

¹⁵ The word perspicere which means to see clearly, literal translation from the Greek optiki, téchni, from the verb oráo, I see, means science of vision,

*che sapere bene figurare lo ufizio*¹⁴. Bramante nel finto coro di Santa Maria presso San Satiro individua, invece, la possibilità di contrarre lo spazio costringendolo scientificamente fra due piani, il quadro e il piano di fondo, e lo fa generando una doppia proporzionalità: fra il quadro e la distanza dell'osservatore e fra il piano di fondo, la distanza dell'osservatore e il quadro. Queste proporzionalità, spesso scambiate per coincidenze, sono posizioni reciproche degli elementi scientificamente collocate. In seguito all'attento studio delle due opere, usiamo qui il termine prospettiva nel senso di *ars perspectiva*, da quel *perspicere*¹⁵ già usato da Boezio che ci indica i principi che si sono succeduti per rappresentare la profondità dello spazio infinito attraverso il numero, la proporzionalità e la misura.

Milano conserva una straordinaria testimonianza del talento innovatore di due dei più significativi protagonisti del Rinascimento, chiamati da Ludovico il Moro, che producono i primi due modelli geometrici fondamentali per l'avanzamento dell'*ars perspectiva* nella città meneghina.

La prospettiva solida del finto coro di Santa Maria presso San Satiro pensata da Bramante è sicuramente un importante momento dell'avanzamento della scienza prospettica.

Per contrarre lo spazio nella finzione scenografica occorre fare riferimento alla relazione tra le variabili della prospettiva accelerata: la posizione relativa del punto di vista, del quadro e del 'piano di fondo' π_1 parallelo al quadro. La contrazione dell'architettura ideata dipende dalla posizione di questo piano. Nota la profondità da contrarre e decisa la posizione del quadro π e del punto di vista PV, si fissa il secondo piano parallelo al quadro alla distanza di 3 piedi (profondità di rilievo della prospettiva accelerata del finto coro) e si congiungono i punti notevoli A, B, C con il punto di vista: gli allineamenti intersecano il piano π_1 parallelo a π individuando i punti A1, B1, C1. Unendo questi punti con i corrispondenti sul quadro D, E, F si determinano i segmenti A1D, B1E e C1F i cui prolungamenti si intersecano in P3, che è il punto di convergenza delle parallele ai segmenti descritti dai cassettoni della volta contratta. Una volta individuati questi quattro elementi ed il procedimento metrico che li lega è facile ricavare tutti i punti della prospettiva solida (Fig.15).

Il tracciamento costruttivo del cassero ligneo che mantiene il pavimento orizzontale, può essere stato fatto in scala o al vero sul pavimento,

¹⁴ Cit. Da Vinci, L., Manoscritto A, Foglio 3, recto.

¹⁵ La parola *perspicere* significa vedere chiaramente, traduzione letterale dal greco *optiki, téchni*, dal verbo *oráo*, vedo, significa scienza della visione.

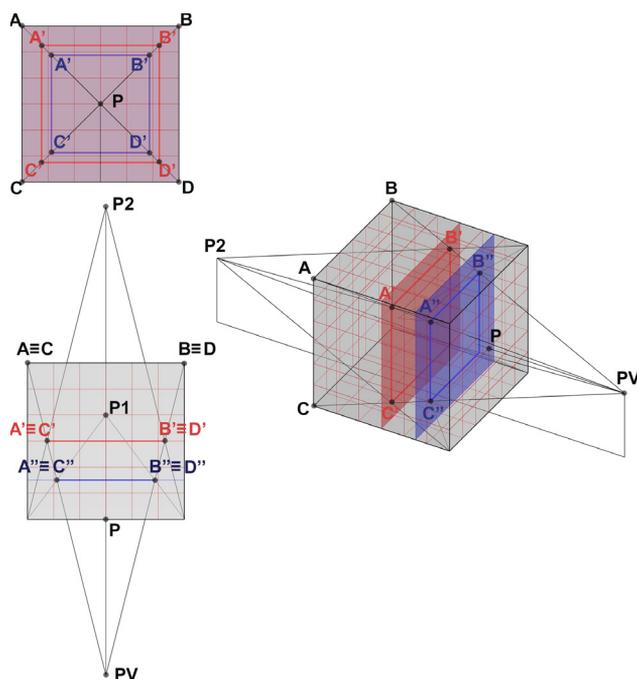


Fig. 15 Schema tridimensionale delle tre variabili della prospettiva solida: punto di vista, quadro e piano di fondo.

Three-dimensional diagram of the three variables of solid perspective: viewpoint, frame and background plane.

and section the fundamental elements of the perspective. Once the tracing has been prepared and the framework of the fake choir has been built, we proceed with defining the perspective position of the pillars, creating a simplified wooden structure on which to define the minor parts in stucco, and we proceed with the final painting.

If we consider a cube with a side of 6 units and with one face coinciding with the perspective framework and we place the point of view at a distance equal to the side of the cube and at a height equal to half (3 units) and we place the plane parallel to the frame at a distance equal to half the side, the point of intersection P3 is symmetrical to the point of view with respect to the plane $\pi 1$ parallel to the framework. If we halve the distance between the framework and the background plane $\pi 1$ to $1/4$, we have a distance of P3 from $\pi 1$ equal to $1/3$ of that between PV and $\pi 1$. This reasoning highlights the proportional relationship between the distance of the viewpoint and the point P3 in relation to the position of the plane $\pi 1$.

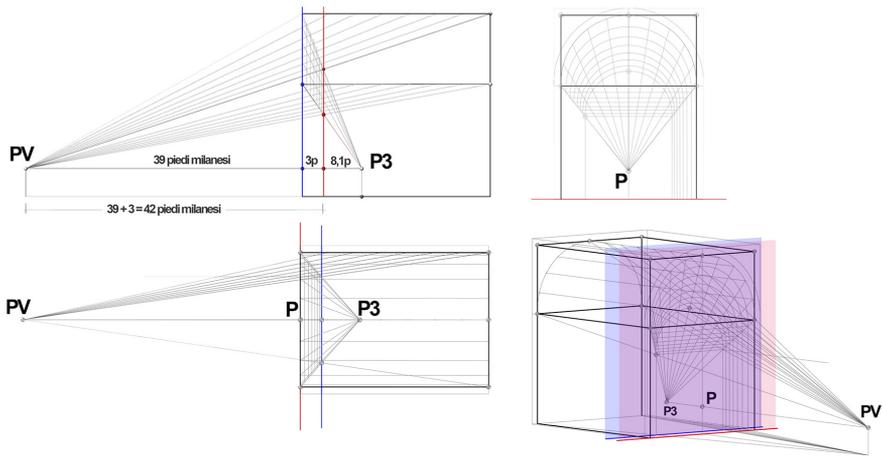


Fig. 16 Schema delle variabili della prospettiva solida del coro.

Diagram of the choir's solid perspective variables.

riportando in pianta e in sezione gli elementi fondamentali della prospettiva. Una volta preparato il tracciamento e costruita l'armatura del finto coro si procede con la definizione della posizione prospettica dei pilastri, creando una struttura lineare semplificata sulla quale definire in stucco delle parti minori, e si procede alla pittura finale.

Se si considera un cubo di lato pari a 6 unità e con una faccia coincidente al quadro prospettico e si pone il punto di vista ad una distanza pari al lato del cubo e ad un'altezza pari alla metà (3 unità) e si pone il piano parallelo al quadro ad una distanza pari alla metà del lato, il punto di intersezione P3 è simmetrico al punto di vista rispetto al piano parallelo al quadro π_1 . Se si dimezza la distanza fra il quadro e il piano di fondo π_1 portandola a $\frac{1}{4}$ si ha una distanza del P3 da π_1 pari a $\frac{1}{3}$ di quella che intercorre tra PV e π_1 . Questo ragionamento evidenzia la relazione di proporzionalità fra la distanza del punto di vista e il punto P3 rispetto alla posizione del piano π_1 . Nel finto coro uno schema analogo fissa le misure delle variabili prospettiche: la distanza tra i due piani paralleli a 3 piedi, la distanza tra PV e P2 vale 42 piedi e la distanza tra P2 e P3 vale 8,1 come rilevato. Infine la distanza tra PV e il quadro vale 39 piedi, che equivale a 1,5 volte la profondità del coro simulato, pari a 26 piedi (Fig.16). La corrispondenza della costruzione a valori metrici significativi conferma la correttezza dell'ipotesi e documenta che gli interventi non hanno modificato la posizione e la morfologia del finto coro.

In the fake choir, a similar scheme fixes the measures of the perspective variables: the distance between the two parallel planes is 3 feet, the distance between PV and P2 is 42 feet, and the distance between P2 and P3 is 8.1. Finally, the distance between PV and the framework is 39 feet, which is equivalent to 1.5 times the depth of the simulated choir, equal to 26 feet (Fig.16). The correspondence of the construction to significant metric values confirms the correctness of the hypothesis and documents that the interventions have not modified the position and morphology of the false choir.

The dynamic perspective

Further insights into the digital model underline the innovative scope of the project. In fact, after the creation of a wooden door that prevents axial entry, only the digital simulation of the approach along the nave allows us to appreciate the true extent of the perspective deception in the simulation of a virtual space that persists from the entrance to the theoretical viewpoint of the choir projection. In practice, there is no unique privileged point as one would expect, but a succession of points on the longitudinal axis in which the illusion is maintained from the entrance to the projective centre. The simulation of the advancement in the digital model shows that the effectiveness of the perspective simulation is maintained along the axis of the church, from the entrance to the viewpoint of the projection of the fake choir. The effect persists even when moving to the left or right up to about 5 Milanese feet, corresponding to half the width of the nave.

The slight asymmetry of the choir and the lack of perspective references on the floor amplify the effectiveness of the simulation because the eye focuses on the main evidence, underlined by the prevalence of elements consistent with the position assumed by the observer in movement. The persistence along the entire nave leads one to seek a demonstration and whether there was a design control or geometric awareness.

The position of the viewpoint does not explain the effectiveness of the illusion along the entire nave (Fig.10 and Fig.11) because it is only the point where it vanishes, and the point is too advanced to control the alignment of the choir to the nave, which is what justifies its effectiveness. The solution is therefore obtained by collimating the depth lines of the virtual choir with those of the nave, which shows a simple projective scheme, underlined by some metric recurrences found in section.

The golden series that defines the significant measurements of the longitudinal section of the church also composes the conspicuous points of Bramante's perspective machine: the viewpoint of the virtual choir PV and

La prospettiva dinamica

Ulteriori approfondimenti sul modello digitale realizzato per questa ricerca, sottolineano la portata innovativa del progetto. Infatti, dopo la sistemazione attuale dell'ingresso che impedisce l'ingresso assiale all'edificio, solo la ricostruzione digitale permette di apprezzare la reale portata dell'inganno prospettico nella simulazione di uno spazio virtuale che persiste dall'ingresso sino al punto di vista teorico della proiezione del coro. In pratica non esiste un punto privilegiato univoco come ci si aspetterebbe, ma una successione di punti sull'asse longitudinale nei quali l'illusione si mantiene dall'ingresso sino al centro proiettivo. La simulazione del percorso d'avanzamento nel modello digitale mostra come l'efficacia della simulazione prospettica si mantenga lungo l'asse della chiesa, dall'ingresso fino al punto di vista della proiezione del finto coro. L'effetto persiste anche spostandosi a sinistra o a destra fino a circa 5 piedi milanesi, corrispondenti alla metà della larghezza della navata.

La leggera asimmetria del coro e la mancanza di riferimenti prospettici sul pavimento amplificano l'efficacia della simulazione perché l'occhio si focalizza sull'evidenza principale, sottolineata dalla prevalenza degli elementi coerenti con la posizione assunta dall'osservatore in movimento. La persistenza lungo l'intera navata induce a cercare una dimostrazione che verifichi un eventuale controllo progettuale, ovvero la consapevolezza geometrica.

La posizione del punto di vista non spiega l'efficacia dell'illusione lungo tutta la navata (Fig.10 e Fig.11), perché esso è solo il punto in cui essa svanisce e il punto è troppo avanzato per controllare l'allineamento del coro alla navata, che è quello che ne giustifica l'efficacia.

La soluzione si ricava quindi con la collimazione delle rette di profondità del coro virtuale con quelle della navata, che mostra uno schema proiettivo semplice, sottolineato da alcune ricorrenze metriche riscontrate in sezione.

La serie aurea che definisce le misure significative della sezione longitudinale della chiesa inquadra anche i punti cospicui della macchina prospettica concepita da Bramante: il punto di vista del coro virtuale PV e il punto di collimazione PC posizionato subito dopo l'ingresso nella chiesa, a 42 piedi dal piano che separa navata e crociera $\pi 2$. Questa distanza è la stessa che separa il punto di vista PV e il piano di fondo del finto coro $\pi 1$, mentre la distanza di 25 piedi tra i due punti privilegiati PC e PV è uguale a quella tra i piani $\pi 1$ e $\pi 2$. Questo schema è una trasposizione di quello descritto da Leon Battista Alberti nel *De Pictura* (1435), basata sulla traslazione della dimostrazione del XIII teorema di Piero della Francesca nel *De Prospectiva Pingendi*, coevo al progetto (Casale, 2018). La 'macchina

the collimation point PC positioned immediately after the entrance to the church, 42 feet from the plane that separates the nave and the crossing $\pi 2$. This distance is the same that separates the viewpoint PV and the back plane of the fake choir $\pi 1$, while the distance of 25 feet between the two privileged points PC and PV is equal to that between the planes $\pi 1$ and $\pi 2$. This scheme is a transposition of the one described by Leon Battista Alberti in De Pictura (1435), based on the translation of the demonstration of Piero della Francesca's XIII theorem in De Prospectiva Pingendi, contemporary with the project (Casale, 2018). Bramante's 'perspective machine' applies the same scheme, which also identifies the depth of the transept (Fig.8).

The perspective variables fixed at significant points of the system document a geometric control of the projective process that also suggests awareness of the effect along the entire nave. The 'Mirabile Artificio' was therefore not the static perception of an expanded space but the dynamic management of visual perception that creates a virtual space from the entrance to the point beyond which the deception disappears. This effect derives from the translation of the virtual pictorial frame created by the accelerated perspective of the fake choir; a translation that does not change the perspective. The three-dimensional transposition of the scheme explains Bramante's 'perspective machine' that shows that PC and PV are the two extremes of the artifice, taking up the scheme of Piero della Francesca and Alberti in the measurements of the church. To better understand the geometric reasoning that determines the parameters of the 'perspective machine' of the church, we can use a modular space composed of cubes that correspond to the nave with its vault. One of these (A, B, C, D, E, F, G, H) encloses the choir. The latter is put in perspective from the viewpoint (P') at zero altitude and at a distance equal to half the side of the cube ($1/2L$) on the faces E, F, G, and H (square). The perspective of the cube is reduced at the points A', B', C', D'. Now we move the viewpoint to P "at a distance equal to $3/2 L$ from P" and from the framework on the second face of the second cube I, L, M, N, and put the two cubes in perspective (A, B, C, D, E, F, G, H, and E, F, G, H, I, L, M, N) at the points E', F', A", B", G', H', C", D", I, L, M, N (Fig.17).

We observe that the perspectives of the first cube on the first and second frameworks are equal and translated from L. The first perspective is the planar image of the solid perspective on the structure of the false choir, while the second joins the span of the central nave with the solid perspective of the choir (Fig.18). If the framework is moved back, and proportionally also the point of view, by a dimension equal to the side of

prospettica' del Bramante applica lo stesso schema, che individua anche la profondità del transetto (Fig.8). Le variabili prospettiche fissate in punti significativi dell'impianto documentano un controllo geometrico del processo proiettivo che lascia supporre anche la consapevolezza dell'effetto lungo tutta la navata.

Il 'Mirabile Artificio' non sarebbe quindi la percezione statica di uno spazio dilatato ma la gestione dinamica della percezione visiva che crea uno spazio virtuale dall'ingresso al punto oltre il quale l'inganno scompare. Questo effetto deriva dalla traslazione del quadro pittorico virtuale creato dalla prospettiva accelerata del finto coro, traslazione che, come risaputo, non cambia la prospettiva. La trasposizione tridimensionale dello schema spiega la 'macchina prospettica' di Bramante che mostra che PC e PV sono i due estremi dell'artificio riprendendo lo schema di Piero e dell'Alberti nelle misure della chiesa.

Per comprendere meglio il ragionamento geometrico che determina i parametri della 'macchina prospettica' della chiesa, possiamo ricorrere a uno spazio modulare composto da cubi che corrisponde alla navata con la sua volta. Uno di questi (A, B, C, D, E, F, G, H) racchiude il coro. Quest'ultimo è messo in prospettiva dal punto di vista (P') a quota zero e alla distanza pari alla metà del lato del cubo ($1/2L$), sulla faccia E, F, G, H (quadrato). La prospettiva del cubo è ridotta nei punti A', B', C', D'. Ora spostiamo il punto di vista su P "a una distanza pari a $3/2 L$ da P'" e dalla cornice sulla seconda faccia del secondo cubo I, L, M, N, e mettiamo i due cubi in prospettiva (A, B, C, D, E, F, G, H, e E, F, G, H, I, L, M, N) nei punti E', F', A", B", G', H', C", D", I, L, M, N (Fig.17).

Osserviamo che le prospettive del primo cubo sulla prima e sulla seconda cornice sono uguali e traslate da L. La prima prospettiva è l'immagine planare della prospettiva solida sulla struttura del finto coro, mentre la seconda unisce la campata della navata centrale con la prospettiva solida del coro (Fig.18). Se la cornice viene spostata indietro, e proporzionalmente anche il punto di vista, di una dimensione pari al lato del cubo, vediamo che le prospettive sono sempre sovrapposte e l'illusione della prospettiva solida rimane valida. Quindi il punto di vista P' non sarebbe davvero un punto di vista privilegiato, ma l'ultimo limite oltre il quale si perde la corrispondenza tra realtà e finzione.

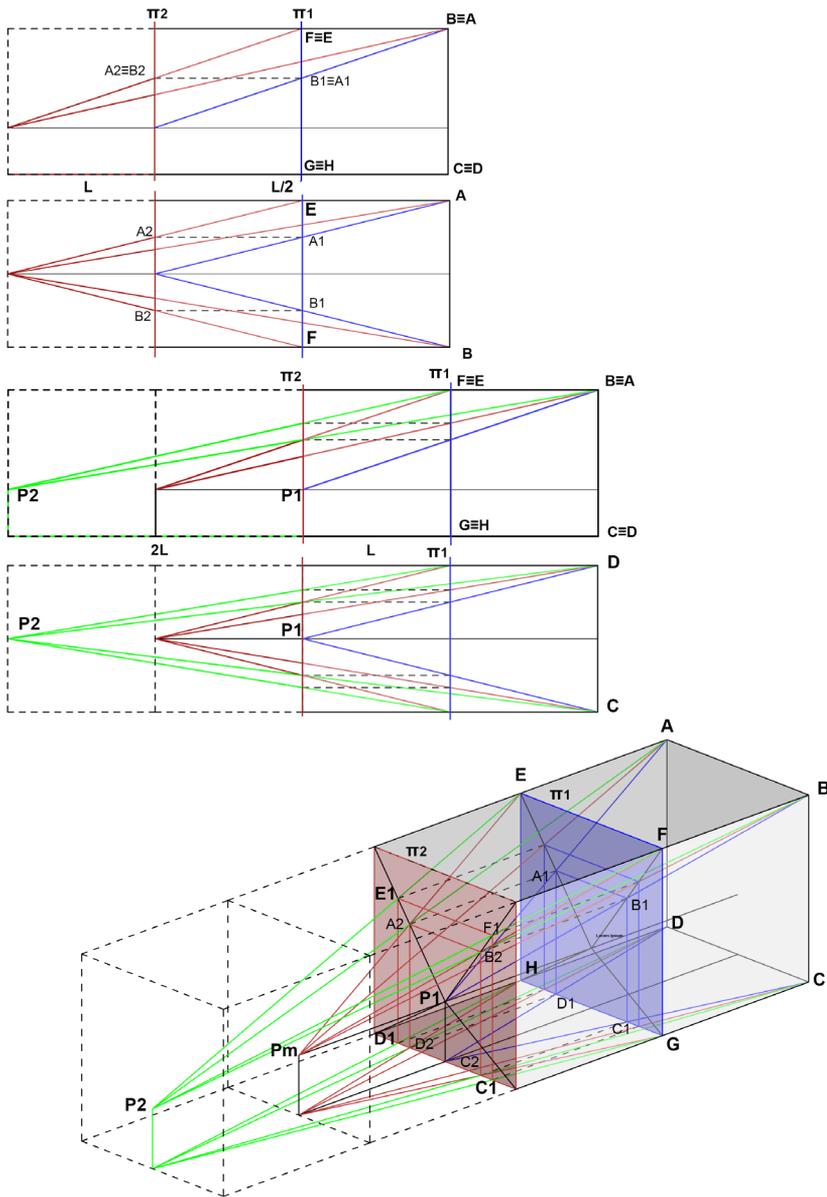


Fig. 17 Schema proiettivo della prospettiva dinamica.
Dynamic perspective projective diagram.

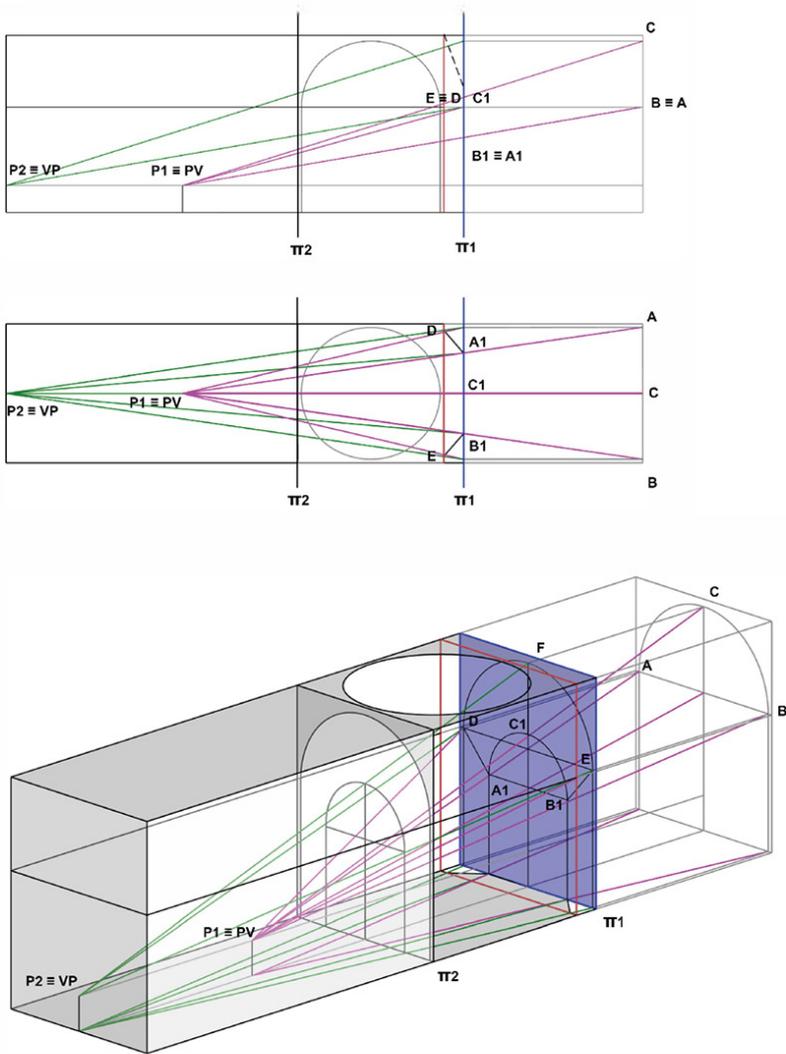


Fig. 18 Applicazione dello schema riferito alla navata di santa Maria presso San Satiro.
Application of the diagram referring to the nave of Santa Maria presso San Satiro.

the cube, we see that the perspectives are always superimposed and the illusion of the solid perspective remains valid. Therefore, the viewpoint P' would not really be a privileged point of view, but the last limit beyond which the correspondence between reality and fiction is lost.

The scientific development

The reading of De Pictura highlights a series of axioms and rules that see in the measure, in the squared grids and in the cubic space a rigorous design method, which the treatise writer refers to empirically and the illustrator of the Lucca manuscript clarifies with a drawing that represents a flat scheme that can be referred to a space marked by a cubic tessellation¹⁶. During the Renaissance, the use of 'cubic space' was the method of design control in architecture, and Bramante's project for the church of Santa Maria at San Satiro is no exception.

The illustration of the procedure for putting into perspective a cube of given dimensions divided into modules, with the framework on one of the faces and the viewpoint at distance and height in proportion to the size of the edge, highlights relationships and coincidences between the perspective variables. The representation of the cube in perspective exemplifies the possibility of 'measuring' an environment in which the plan and elevation are contained in the same square matrix layout: the grid belonging to the framework is a contemporary representation of the plan and the elevation of the cubic room. The idea of a cubic space and its flat design is therefore governed by the same modular layout of the square grid, in which icographics and orthographics can be traced back to a layout that associates numbers and measures also in perspective with a notable economy of operations. The Fig.19 illustrates the relationship between the surfaces projected onto the frame and the grid placed on it. The side is worth 6 modules and the faces are divided into 36 (6 x 6) smaller squares, for 216 cubic units, as in the explanatory graph of Alberti's words. If the point of view A is placed at a distance from one of the faces of the cube¹⁷ equal to the length of the edge (6 units) and at a height of 2 units, the projection onto the framework of the opposite edge of the upper face coincides with the second horizontal line from the top of the frame's grid, while the projection of the opposite edge to the framework of the base of the cube corresponds to the first horizontal line of the same grid. If the

¹⁶ L. B. Alberti. (1436). *De Pictura and De Elementa picturae*, c 23r; *Biblioteca Statale di Lucca*, ms. 1448. (manuscript dated 13 February 1518).

¹⁷ *The face of the cube is at the same time the representation framework.*

La maturazione scientifica

La lettura del *De Pictura* evidenzia una serie di assiomi e di regole che vedono nella misura, nelle griglie quadrettate e nello spazio cubico un metodo di progetto rigoroso, che il trattatista riferisce in maniera empirica e l'illustratore del manoscritto di Lucca chiarisce con un disegno rappresentate uno schema piano riferito a uno spazio scandito da una tassellazione cubica¹⁶. Durante il Rinascimento il ricorso allo 'spazio cubico' era il metodo di controllo progettuale dell'architettura e il progetto bramantesco per la chiesa di Santa Maria presso San Satiro non fa eccezione. L'illustrazione del procedimento per mettere in prospettiva un cubo di dimensioni note suddiviso in moduli quadrati, con il quadro su una delle facce e il punto di vista a distanza ed altezza in proporzione con la misura dello spigolo, evidenzia relazioni e coincidenze tra le variabili prospettiche. La rappresentazione del cubo in prospettiva esemplifica la possibilità di 'misurare' un ambiente in cui pianta e alzato siano contenuti nello stesso schema a matrice quadrata: la griglia appartenente al quadro è rappresentazione contemporanea della pianta e dell'alzato della stanza cubica. L'idea di uno spazio cubico e il suo disegno piano sono quindi governate dallo stesso schema modulare della griglia quadrata, nella quale *icnographia* e *ortographia* possono essere ricondotte ad uno schema che associa numero e misura anche in prospettiva con un'economia di operazioni notevole.

La Fig.19 illustra la relazione tra le superfici proiettate sul quadro e la griglia posta su di esso. Il lato vale 6 moduli e le facce sono divise in 36 (6 x 6) quadrati più piccoli, per 216 unità cubiche, come nel grafico esplicativo delle parole dell'Alberti. Se si colloca il punto di vista A a una distanza da una delle facce del cubo¹⁷ pari alla lunghezza dello spigolo (6 unità) e all'altezza di 2 unità, la proiezione sul quadro dello spigolo opposto della faccia superiore coincide con la seconda linea orizzontale dall'alto della griglia del quadro, mentre la proiezione dello spigolo opposto al quadro della base del cubo corrisponde alla prima linea orizzontale della stessa griglia. Se si dimezza la distanza del punto di vista, la coincidenza tra prospettiva e griglia si verifica per gli spigoli opposti al quadro e ortogonali al piano geometrico. Con questa matrice, se si pone il punto di vista a una distanza dal quadro pari allo spigolo del cubo e a un'altezza pari alla metà, si ripercorre il problema del *quadrangulus* esposto da Leon Battista

¹⁶ L.B. Alberti. (1436). *De Pictura e De Elementa picturae*, c 23r, Biblioteca Statale di Lucca, ms. 1448. (manoscritto datato 13 febbraio 1518).

¹⁷ La faccia del cubo è al contempo quadro di rappresentazione.

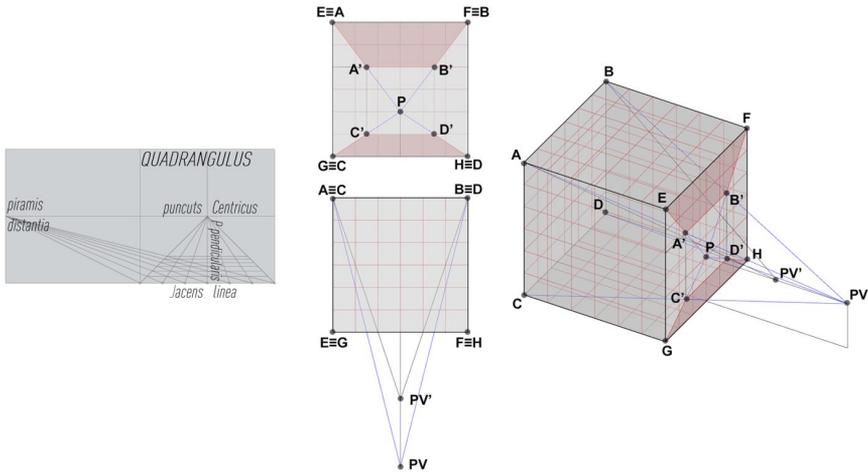


Fig. 19 Ridisegno del *quadrangulus* albertiano, schema geometrico e vista tridimensionale.

Redesign of the Albertian quadrangulus, geometric diagram and three-dimensional view.

*distance of the viewpoint is halved, the coincidence between perspective and grid occurs for the edges opposite to the framework and orthogonal to the geometric plane. With this matrix, if the viewpoint is placed at a distance from the framework equal to the edge of the cube and at a height equal to half, the problem of the quadrangulus described by Leon Battista Alberti in the *De Pictura*¹⁸ and subsequently taken up by Piero della Francesca in the incipit of *De Perspectiva Pingendi*¹⁹ is retraced (Fig.20), which became the paradigm for the positioning of the height of the viewpoint (3 Florentine braccia = 4 Milanese feet), but here one senses that the problem is of a completely different magnitude, having within itself the key that explains the construction of solid perspective, which no one before Bramante had dared to apply on a real scale. This simulation allows us to hypothesize that Bramante applied an extremely simple procedure, derived from Alberti's perspective method, which projected the foundations of the Renaissance conception of 'cubic space'²⁰.*

¹⁸ L. B. Alberti, *op. cit.*

¹⁹ Piero della Francesca. (1476 ca). *De Perspectiva Pingendi. Libro I - XII*, "Da l'ochio dato nel termine posto il piano asignato degradare." Cfr. Nicco Fasola (1984).

²⁰ L. B. Alberti, *op. cit. libro I cap. 19*. The problem is solved by placing a square on the geometrical plan of 6 x 6 Florentine braccia with the framework on one side and the point of view at a distance equal to the side (6 braccia) and at a height equal to half the side.

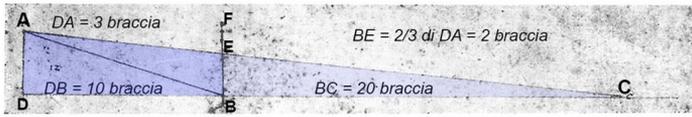


Fig. XII.

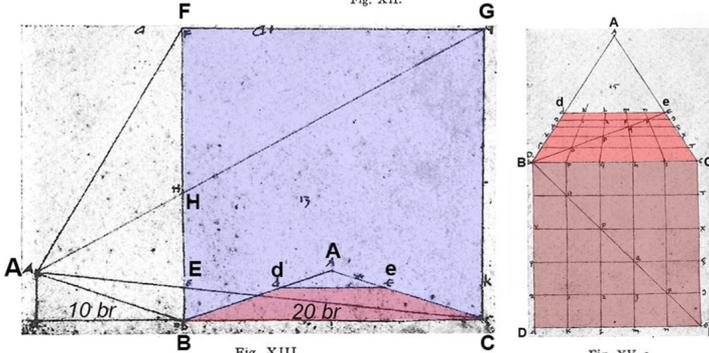


Fig. XIII.

Fig. XV. a

Fig. 20 Metodo per individuare la profondità tratte dal *De Perspectiva Pingendi*, con indicate le misure in braccia.

Method for finding the depth from De Perspectiva Pingendi, showing measurements in braccia.

Alberti nel *De Pictura*¹⁸ e poi ripreso da Piero della Francesca nell'*incipit* del *De Perspectiva Pingendi*¹⁹ (Fig.20), che divenne il paradigma per il posizionamento dell'altezza del punto di vista (3 braccia fiorentine = 4 piedi milanesi), ma qui si intuisce che il problema è di tutt'altra portata, avendo in sé la chiave che spiega la costruzione della prospettiva solida, che nessuno prima di Bramante aveva osato applicare a scala reale.

Questa simulazione permette di ipotizzare che Bramante abbia applicato un procedimento di estrema semplicità, derivato dal metodo prospettico dell'Alberti, che getta le basi della concezione dello 'spazio cubico' rinascimentale²⁰.

In San Satiro Bramante dimostra un sapere che integra architettura e pittura in un unico metodo riconducibile alla griglia quadrata. Questo strumento consentiva di pensare lo spazio in funzione di forma, numero e misura, per proiettarlo su un piano (prospettiva lineare) o per contrarlo tra due piani (il quadro prospettico e il piano di fondo), generando una prospettiva solida.

¹⁸ L. B. Alberti, op. cit.

¹⁹ Piero della Francesca. (1476 ca). *De Perspectiva Pingendi*. Libro I - XII, "Da l'occhio dato nel termine posto il piano asignato degradare." Cfr. Nicco Fasola (1984).

²⁰ L. B. Alberti, op. cit. libro I cap. 19, il problema è risolto ponendo un quadrato sul geometricale di 6 x 6 braccia fiorentine con il quadro su un lato del quadrato e il punto di vista ad una distanza pari al lato del quadrato (6 braccia) ed a un'altezza pari alla metà del lato (3 braccia).

In San Satiro Bramante demonstrates a knowledge that integrates architecture and painting in a single method that can be traced back to the square grid. This tool allowed us to think of space in terms of shape, number and measure, to project it onto a plane (linear perspective) or to contract it between two planes (the perspective framework and the background plane), generating a solid perspective.

The simple scientific reference documented by Leon Battista Alberti, if understood and associated with a theory of modulation typical of fifteenth-century architecture, allowed architects and painters of the second half of the fifteenth century to carry forward, thanks to a series of intellectual speculations, a maturation of perspective such that it could be used as an irreplaceable tool for expanding space with scenographic strategies.

Il semplice riferimento scientifico documentato da Leon Battista Alberti, se compreso e associato a una teoria della modulazione tipica dell'architettura del Quattrocento, ha consentito agli architetti e ai pittori della seconda metà del Quattrocento di portare avanti, grazie ad una serie di speculazioni intellettuali, una maturazione della prospettiva tale da poterla utilizzare come strumento insostituibile per ampliare lo spazio con strategie scenografiche.

THE KNOWLEDGE

Surveys and historical studies

The uniqueness of the Chorus has aroused the attention of many scholars over the years, who have investigated the artefact by formulating various hypotheses to clarify the perspective mechanism. In particular, determining the point of view, the basis of any perspective, has been the subject of many analyses and theories. Interestingly, the research on the illusionary effect, starting from the same assumption of a simulated depth equal to the arms' length of the transept, led to an unambiguous solution (Fig.21a and Fig. 21b).

In chronological order, the surveys by F. Maspero (1938) and F. Cassina (1940, 1962) are among the first documents to fully describe by instrumental survey the geometries of the church and the fake choir. These studies do not advance hypotheses about the perspective structure, limiting themselves to the geometric description of the construction.

The research of architectural historian Arnaldo Bruschi (1969: 745-750) is a milestone work that attributes to Bramante the ability to evolve the very meaning of space, sanctioning the transposition from reality to illusion. Perspective is no longer, as in Brunelleschi and Alberti, the means of unambiguously ordering a portion of space in mathematical terms, but rather a resource to represent the real space illusion expressed in its three-dimensionality. To obtain the maximum scene 'realism', it is necessary to have recourse to the beholder's subjective experience and to make use of means – such as the judicious use of lighting, the articulation of surfaces and the particular use of materials and finishes – that promote the emotional participation of the observer. It is necessary to consider the distinct, even occasional, modalities of fruition, to leave, as Vitruvius suggested, the absoluteness, the scientific objectivity of proportions, to 'deform' architecture according to the effects, not only visual but also psychological. Bruschi (Bruschi 1969, pp. 745-750) identifies the height of the viewpoint at 2.6 m and sets the observer's distance in a golden ratio with respect to the width of the painting, defined by the width of the nave.

Filippo Camerota (2006: 247-248) takes up Bruschi's hypothesis, identifying the station point at 2.6 m., necessary, according to him, for the best visibility of the thaumaturgic image, and agreeing with the interpretation of the fake choir as the pivot of the building, around which to articulate the composition of the spaces, the real ones and those suggested by the illusion. In Camerota's opinion, the illusory choir

LA CONOSCENZA

Rilievi e studi storici

La particolarità del Coro ha destato negli anni l'attenzione di molti studiosi, che hanno indagato il coro formulando diverse ipotesi tese a chiarire il meccanismo prospettico. In particolare, la determinazione del punto di vista, cardine di ogni prospettiva, è stata oggetto di molte analisi e ipotesi. È interessante notare come le ricerche condotte sui principi dell'effetto illusorio, pur partendo dallo stesso presupposto di una profondità simulata uguale alla lunghezza dei bracci del transetto, non portino ad una soluzione univoca (Fig.21a e Fig.21b).

In ordine cronologico i rilievi di F. Maspero (1938) e F. Cassina (1940, 1962) sono tra i primi documenti a descrivere compiutamente tramite rilievo strumentale le geometrie della chiesa e del finto coro. Questi studi non avanzano ipotesi sulla struttura prospettica del finto coro, limitandosi al rilievo geometrico dell'architettura.

Le ricerche dello storico dell'architettura Arnaldo Bruschi (1969: 745-750) sono un'opera miliare nell'attribuire a Bramante la capacità di evolvere il significato stesso dello spazio, sancendo la trasposizione dalla realtà all'illusione, da uno spazio reale, fisicamente utilizzabile, allo spazio rappresentato da contemplare. La prospettiva non è più, come nel Brunelleschi e nell'Alberti, il mezzo per ordinare in modo univoco e certo una porzione dello spazio misurabile e traducibile in termini matematici, quanto un mezzo per dare alla rappresentazione l'apparenza, l'illusione di uno spazio reale, naturalisticamente vero e verosimile, espresso nella sua tridimensionalità. Per ottenere la massima 'verosimiglianza' dello spettacolo, è necessario far ricorso all'esperienza soggettiva di chi guarda e valersi di mezzi, come l'accorto impiego delle luci, l'articolazione delle superfici e il particolare impiego di materiali e di rifiniture, che sollecitano la partecipazione emotiva dell'osservatore. È quindi necessario per tener conto delle particolari, anche occasionali, modalità di fruizione, abbandonare, come del resto suggeriva Vitruvio, l'assolutezza, l'oggettività scientifica delle proporzioni. L'architettura deve essere sfruttata in funzione degli effetti, non solo visivi ma anche psicologici, che l'architetto vuole raggiungere. Bruschi (Bruschi 1969, pp. 745-750), individua l'altezza del punto di vista a 2,6 m. e fissa la distanza dell'osservatore in rapporto aureo con la larghezza del quadro, definito dall'ampiezza della navata.

Filippo Camerota (2006: 247-248) riprende l'ipotesi di Bruschi individuando il punto di stazione a 2,6 m., necessario alla miglior visibilità dell'immagine taumaturgica, e concordando nell'interpretazione del finto coro come perno

would simulate an extension equal to the length of the transept two arms (approximately 11 meters), reconstructing the static and compositional balance of the dome, otherwise unbalanced in its centralising function. The scholar considers the perspective composition inspired by Masaccio's work *The Trinity*²¹. Still, whereas the latter is characterised by an illusory wall representation that links in with the surrounding architecture, without redefining the spaces and distinguishing the conceptual planes of natural space and perspective fiction, Bramante's choir seeks total illusion. To this end, the artist makes the most of the wall thickness to develop the perspective layout three-dimensionally, using the same materials, colours and ornamental motifs found in the building, together with skilful use of natural light.

On the other hand, the hypothesis of Eros Robbiani (1977: 264) diverges from the previous interpretations. It focused on verifying perspective construction, particularly identifying the point of view. Robbiani's research highlights how the ratio between the viewpoint's distance and the perspective frame's maximum width is equal to 1.5, the minimum distance, in order not to experience perspective aberration phenomena. Aberration is a recurring theme in studies on the rules of perspective. Without bothering with Panofsky's research, it is helpful to recall that the problem was also known to 15th-century scholars, demonstrating, according to Robbiani, a pondered choice by Bramante in sizing the artefact, based on awareness matured directly or indirectly (Robbiani, 1980, note 12).

Having identified the position in the plan, Robbiani proposes a height of 2.10 m for the point of view, which should be increased by a further 10 cm for a total of 2.20 m due to 16th-century repaving. The scholar justifies the atypical height of the ocular position with the need to integrate the perspective illusion with the architectural organism and, simultaneously, emphasise the plastic and chiaroscuro contrasts of the stuccoes.

In support of his hypothesis, Robbiani points out the lack of decorative or architectural elements of reference in the nave, that match any vanishing lines below the horizon line of the fake choir. As a final piece of evidence, Robbiani highlights how, from the identified position, an observer can grasp a synthesis of values that contribute to a unitary perception of the dialogue between illusory space and architectural layout.

From the point of view he identified, it would indeed be possible to see the dome in its entirety and, passing through the arc connecting the nave and transept, the overhanging lantern.

²¹ Cf. Camerota, F. 2006. *La prospettiva del Rinascimento: arte, architettura, scienza*. Foreword by Martin Kemp. Milano: Electa.

dell'edificio, intorno al quale articolare la composizione degli spazi, quelli reali e quelli suggeriti dalla rappresentazione. Secondo Camerota il coro illusorio simulerebbe un'estensione pari alla lunghezza dei due bracci del transetto (circa 11m.), ricostruendo l'equilibrio statico e compositivo della cupola, altrimenti sbilanciata nella funzione centralizzante. Lo studioso ritiene la composizione prospettica ispirata dall'opera di Masaccio la Trinità²¹, ma mentre quest'ultima è caratterizzata da una rappresentazione illusoria a parete che si lega all'architettura circostante, senza ridefinire gli spazi e distinguendo i piani concettuali di spazio reale e finzione prospettica, il coro Bramantesco ricerca l'illusione totale. A tal fine l'artista sfrutta al massimo lo spessore murario per sviluppare tridimensionalmente l'impianto prospettico usando gli stessi materiali, gli stessi colori e gli stessi motivi ornamentali presenti nell'edificio unitamente a un sapiente utilizzo della luce naturale.

L'ipotesi di Eros Robbiani (1977: 264) invece si discosta dalle precedenti interpretazioni. Incentrata sulla verifica della costruzione prospettica, con particolare attenzione all'individuazione del PV, la ricerca di Robbiani evidenzia come il rapporto tra la distanza del punto di vista e la larghezza massima del quadro prospettico sia pari a 1,5, distanza minima per non incorrere in fenomeni di aberrazione prospettica. L'aberrazione è un tema ricorrente negli studi sulle regole della prospettiva. Senza scomodare le ricerche di Panofsky è utile ricordare che il problema era noto anche agli studiosi del quattrocento, a dimostrare, secondo Robbiani, una scelta ponderata di Bramante basata sulla scorta di consapevolezza maturate direttamente o indirettamente (Robbiani 1980, nota 12). Identificata la posizione in pianta Robbiani propone per il PV un'altezza attuale di 2,10 m., che andrebbe aumentata di altri 10 cm per un totale di 2,20 m. in conseguenza di interventi di ripavimentazione cinquecenteschi. Lo studioso giustifica l'altezza atipica, soprattutto per l'epoca, della posizione oculare con la necessità di integrare l'illusione prospettica con l'organismo architettonico ed enfatizzare nel contempo i contrasti plastici e chiaroscurali degli stucchi. A sostegno della propria ipotesi Robbiani, evidenzia la mancanza nella navata del finto coro di elementi decorativi o architettonici di riferimento che si accordino con eventuali linee di fuga al di sotto della linea di orizzonte. Come ultima prova a sostegno della posizione del PV ipotizzata, Robbiani sottolinea come, dalla posizione identificata, un osservatore possa cogliere una sintesi dei valori che contribuiscono a una percezione unitaria del dialogo tra spazio illusorio e

²¹ Cfr. Camerota, F. 2006. *La prospettiva del Rinascimento: arte, architettura, scienza*. Premessa di Martin Kemp. Milano: Electa.

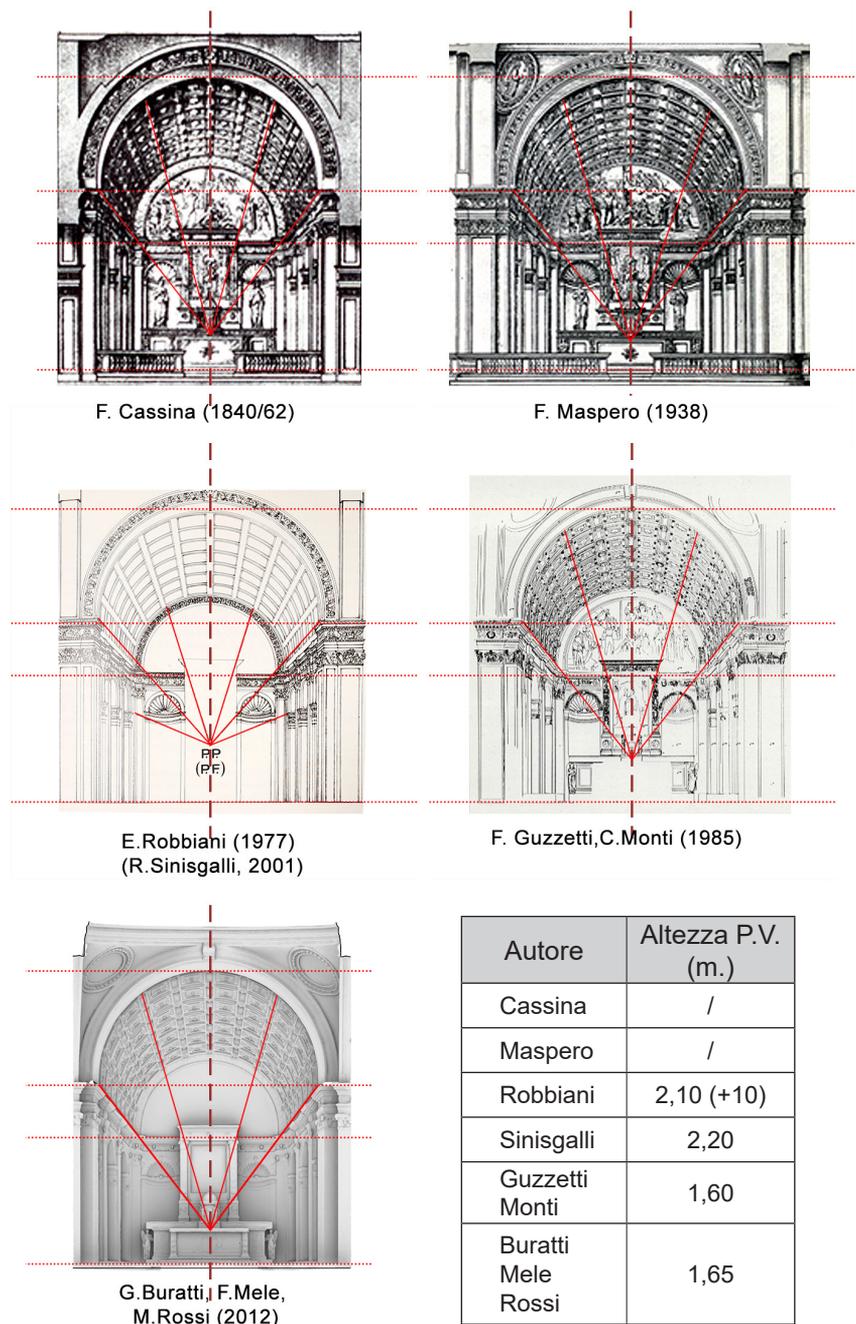
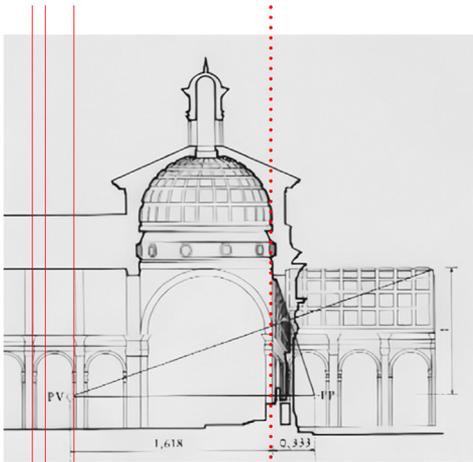


Fig. 21a Comparison of the different hypotheses of scholars investigating the perspective structure of Bramante's fake choir over the years.

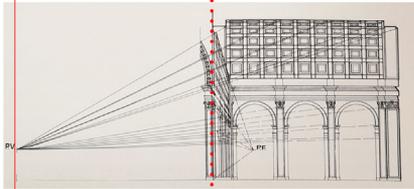


A. Bruschi (1969)
(F. Camerota 2006)

Posizione PV

Altezza 2,6 m

Distanza 14,34 m.

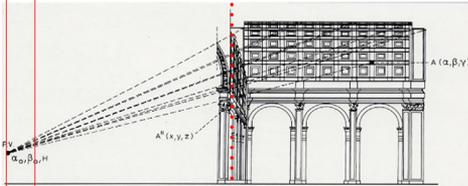


E. Robbiani (1977)
(R. Sinigalli 2006)

Posizione PV

Altezza 2,20 m

Distanza 15,05 m.

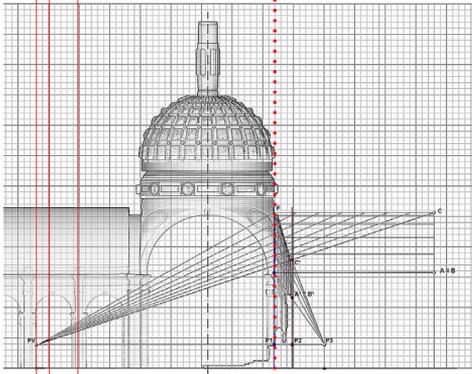


F. Guizzetti,
C. Monti (1985)

Posizione PV

Altezza 1,64 m

Distanza 17 m.



G. Buratti,
G. Mele,
M. Rossi. (2012)

Posizione PV

Altezza 1,67 m

Distanza 18,27 m.

Fig. 21b Confronto tra le diverse ipotesi degli studiosi che negli anni hanno indagato la struttura prospettica del finto coro di Bramante.

Rocco Sinisgalli (2001) agrees with the height of the point of view identified by Robbiani, placing it at a distance of about 15 m. from the perspective frame. The lack of a measured relief explains this difference in interpretation among the scholars. The different proportions given to the choir in the published drawings, which differ from those of the actual transept, suggest that the four researchers had a correct intuition of the geometric meaning but still needed to prove their hypotheses through scientific measurements.

Bruschi and Camerota, for instance, fix the main point at the tabernacle's centre in a personal restitution of the choir elevation, suggesting an 'ideological' perspective reconstruction, influenced by a symbolic bias. Moreover, all the proposed viewpoints are higher than the position recommended by Renaissance treatises, which Alberti fixes at 3 Florentine braccia, corresponding to approximately 1.75 meters, comparable to the eye height of a well-built man. Robbiani justifies this unrealistic height with an argument based on analogies with the Prevedari engraving, in which the horizon seems higher than the human eye, but this reference is about a kneeling man. None of the authors refer to a measured survey, supporting the hypothesis of arbitrary reconstructions of the geometry, which does not consider the previous surveys by Maspero and Cassina, which are more consistent with the studies presented below, conducted with more advanced technology.

The instrumental survey and spatial reading

For an instrumental analysis using scientific methodology, we had to wait until 1985, when F. Guzzetti and C. Monti studied the choir by a photogrammetric survey. The researchers assume that the perspective construction of the false choir is resolved through a central perspective characterised by several parallel perspective planes, whereby the Main Point always lies on a straight line passing through the Point of View and perpendicular to the planes themselves. It is, therefore, possible to analytically define the position of the viewpoint based on the definition of appropriate remarkable points located on the chorus itself.

Starting from the hypothesis that the apse's perspective corresponds to a continuation of the first arc that defines the barrel vault of the illusory space, the researchers describe the choir's depth through five sections, choosing for each of them seven notable points in correspondence with similar and symmetrical elements of the wooden choir.

They thus realise, as later confirmed by our study, that the points returned in the various photogrammetric sockets are not coplanar, since

impianto architettonico, vedendo nella sua interezza la cupola e, superando l'arco di congiunzione tra navata e transetto, la lanterna. Rocco Sinisgalli (2001) condivide l'altezza del punto di vista identificata da Robbiani, posizionandolo a una distanza di circa 15 m. dal quadro.

Tale diversità di interpretazione tra gli studiosi può probabilmente essere spiegata dalla mancanza di un rilievo misurato come riferimento per la costruzione della prospettiva. Le diverse proporzioni date al coro nei disegni pubblicati, diverse da quelle del transetto reale, inducono a supporre che i quattro studiosi abbiano avuto un'intuizione corretta sul significato geometrico, ma non abbiano comprovato le loro ipotesi attraverso misurazioni scientifiche. Bruschi e Camerota, ad esempio, fissano il punto principale al centro del tabernacolo in una restituzione personale, che suggerisce una ricostruzione 'ideologica' della prospettiva viziata da un pregiudizio simbolico. Inoltre, tutti i punti di vista proposti risultano più alti della posizione consigliata dai trattati rinascimentali, che l'Alberti fissa in 3 braccia fiorentine, che corrispondono a circa m. 1,75, paragonabile all'altezza dell'occhio di un uomo di buona corporatura. Robbiani giustifica questa altezza non realistica con una argomentazione basata su analogie con l'incisione Prevedari, nella quale l'orizzonte sembra più alto dell'occhio umano, ma il riferimento è un uomo inginocchiato. Nessuno degli autori fa riferimento a un'indagine misurata, avvalorando l'ipotesi di ricostruzioni arbitrarie della geometria, che non considerano i precedenti rilievi di Maspero e Cassina, risultati più coerenti con gli studi presentati di seguito, condotti con tecnologie più avanzate.

Il rilievo strumentale e la lettura dello spazio

Per un'analisi strumentale, condotta con una metodologia scientifica bisogna aspettare sino al 1985 quando F. Guzzetti e C. Monti hanno studiato il coro tramite rilievo fotogrammetrico. I ricercatori partono dal presupposto che la costruzione prospettica del finto coro sia risolta tramite una prospettiva centrale caratterizzata da diversi quadri prospettici paralleli tra loro, per cui il Punto Principale giace sempre sulla retta passante per il PV e perpendicolare ai piani stessi. È quindi possibile definire analiticamente la posizione del punto di vista in base alla definizione di punti notevoli appropriati situati sul coro stesso. Partendo dall'ipotesi che la prospettiva dell'abside corrisponda a una continuazione del primo arco che definisce la volta a botte dello spazio illusorio, i ricercatori descrivono la profondità del coro attraverso 5 sezioni, scegliendo per ognuna 7 punti notevoli in corrispondenza di elementi analoghi e simmetrici dell'opera lignea. Si accorgono così, come successivamente confermato dal nostro



Fig. 22 Nuvola di punti risultante dall'assemblaggio delle diverse scansioni laser dell'interno della chiesa, sezione al transetto.

Point cloud resulting from assembling the different laser scans of the church interior; section to the transept.

the choir is misaligned from the corresponding plane in the front of the apse. If from the graphic restitution point of view, this deviation can be considered irrelevant, the reference to the frontal plane is necessary to study perspective. Therefore, considering that the deviation between the different points corresponds to a few millimetres, the 35 points chosen are rotated and made coplanar.

As in previous studies, after a series of approximations based on increasingly binding analytical assumptions aimed at simplifying the calculation, the illusory architecture is thus reconstructed and the Point of View identified. Although the researchers do not state precise measurements, a distance of 17,5 m. from the perspective frame and a height of approximately 1,68 m. can be deduced from the survey restitution.

No hypothesis followed the instrumental survey published by Adele Buratti in 1992, which was more focused on the church structure and on the façade than on the articulation of the choir, only hinted at in its section.



Fig. 23 Nuvola di punti risultante dall'assemblaggio delle diverse scansioni laser dell'interno della chiesa, sezione della navata e dell'abside.

Point cloud resulting from assembling the different laser scans of the church interior; section of the nave and apse.

studio, che i punti restituiti nelle diverse prese fotogrammetriche non sono complanari, poiché il coro è disallineato dal piano corrispondente dal fronte dell'abside. Se dal punto di vista della restituzione grafica tale scostamento può essere considerato ininfluenza, per lo studio della prospettiva il riferimento esatto al piano frontale è necessario, perciò, considerando che la differenza tra i diversi punti corrisponde a pochi mm., i 35 punti scelti sono rototraslati e resi complanari. Come negli studi precedenti, dopo una serie di approssimazioni basate su ipotesi analitiche sempre più vincolanti, tese a semplificare il calcolo, è così ricostruita l'architettura illusoria e identificato il PV. Benché i ricercatori non dichiarino delle misure precise è possibile dedurre dalla restituzione del rilievo una distanza di 17,5 m. circa dal quadro prospettico e un'altezza approssimata di 1,68 m.

Nessuna ipotesi ha seguito il rilievo strumentale pubblicato da Adele Buratti nel 1992, più attento alla struttura della chiesa e al paramento della facciata che all'articolazione del coro, solo accennato in sezione.

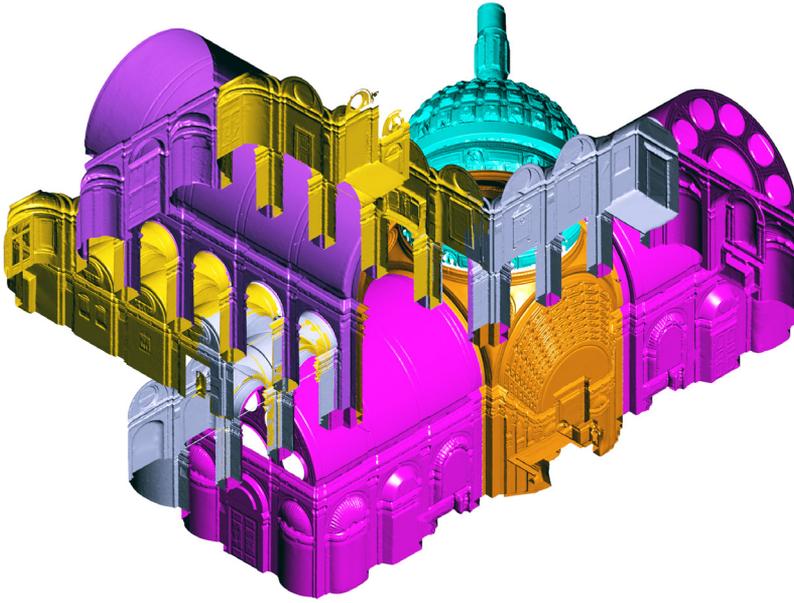


Fig. 24a Digital mesh model of the church processed by optimising the different point cloud captures for the reconstruction of the architecture and choir.

The laser survey carried out by the authors of this book was conducted in 2012 with Faro Focus3D 130 scanners as part of the PRIN 2012 Project²². The study aimed to identify the privileged point of view by the virtual reconstruction of the established design hypothesis that the choir simulates the depth of the transept. The digital reconstruction of the imaginary space of Bramante's architecture was derived from the re-elaboration of a theoretical model deduced from the instrumental laser survey (Fig.22 and Fig.23). The hypothesis was to reconstruct the theoretical model by scanning a transept arm to collimate the perspective choir's conspicuous points and determine the point of view on the longitudinal axis. The latter should be identified by the rays of the fake vault coffers, looking for recognisable references in the photographic overlay on a mesh model. Three-dimensional scans provide, in fact, conspicuous and accurate data, but the point clouds do not constitute a three-dimensional model immediately available for accelerated perspective geometric analysis. Therefore, it was necessary to transform the point cloud into a mesh model (Fig.24a and Fig.24b), whose level of detail was a compromise between

²² *Architectural Perspective – funded by Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica, National Co-ordinator prof. Riccardo Migliari.*

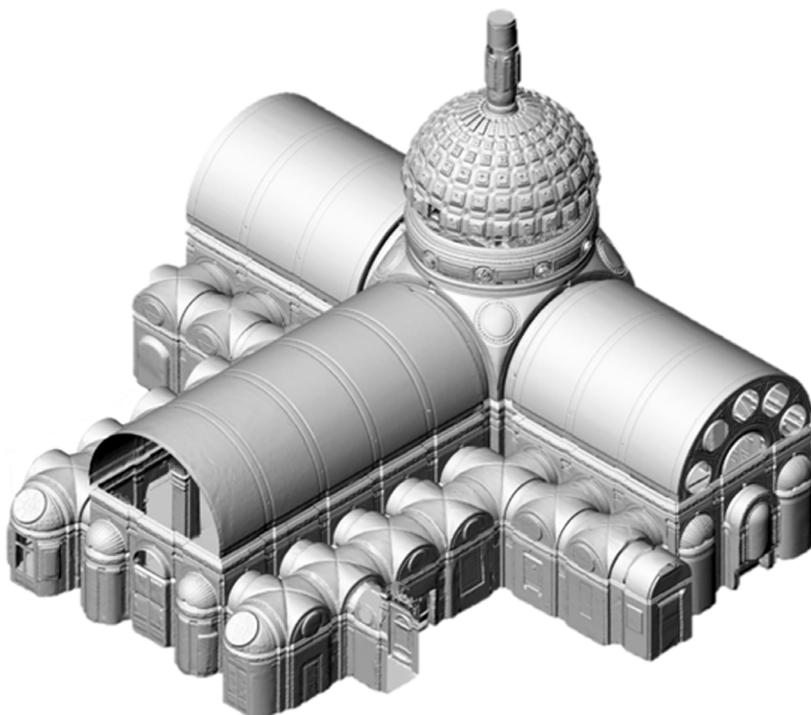


Fig. 24b Modello digitale mesh elaborato ottimizzando la diverse prese della nuvola di punti per la ricostruzione dell'architettura e del coro.

È datato 2012 il Rilievo laser realizzato con scanner Faro Focus3D 130 nell'ambito del Progetto PRIN 2012²². Lo studio ha perseguito l'individuazione del punto di vista privilegiato dalla ricostruzione virtuale dell'ipotesi progettuale consolidata che il coro simula la profondità del transetto.

La ricostruzione digitale dello spazio immaginario dell'architettura bramantesca è stata ricavata dalla rielaborazione di un modello teorico dedotto dal rilievo strumentale con tecnologia laser (Fig.22 e Fig.23). L'ipotesi era quella di ricostruire il modello teorico dell'abside virtuale utilizzando la scansione di un braccio del transetto per collimare i punti cospicui del coro prospettico e determinare il punto di vista sull'asse longitudinale individuato dalla raggiera dei cassettoni della finta volta, cercando i riferimenti riconoscibili nella sovrapposizione fotografica alla nuvola di punti direttamente sul modello mesh.

²² Prospettiva Architettonica – finanziato dal Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica, Coordinatore nazionale prof. Riccardo Migliari.

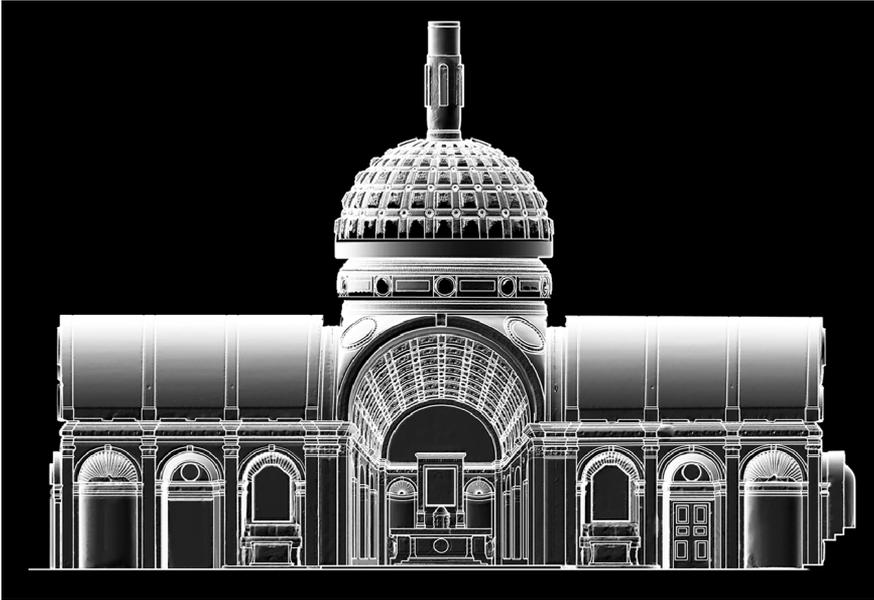


Fig. 25a Status survey, restitution of significant sections.

computational manageability and the precision required by the research, with a very high polygon density for the choir and less for the rest of the architecture.

The overlapping of the photo pixels made available, by the same cloud scan with colour data, to identify the conspicuous points. In restitution, it was decided to deprive the surfaces of decorative paint, obtaining a 'neutral' model that would allow an objective and precise reading of the wall structures' plastic articulation to highlight and facilitate the study of any geometric characteristics and anomalies (Fig.25a e Fig.25b).

Verifying the assumptions described above and searching for the viewpoint are based on the data provided by an accurate digital survey, supplemented by the direct survey of the main elements, which provides an immediate and helpful indication of the tolerances to be observed.

The salient steps were:

- *The assembly of the 24-point clouds produced by the scans, required to survey the church's interior.*
- *The reworking of the mesh model with the stitching of the gaps in the problematic areas.*
- *The restitution of the direct survey and its overlapping on the horizontal section with verifying the construction 'errors'.*

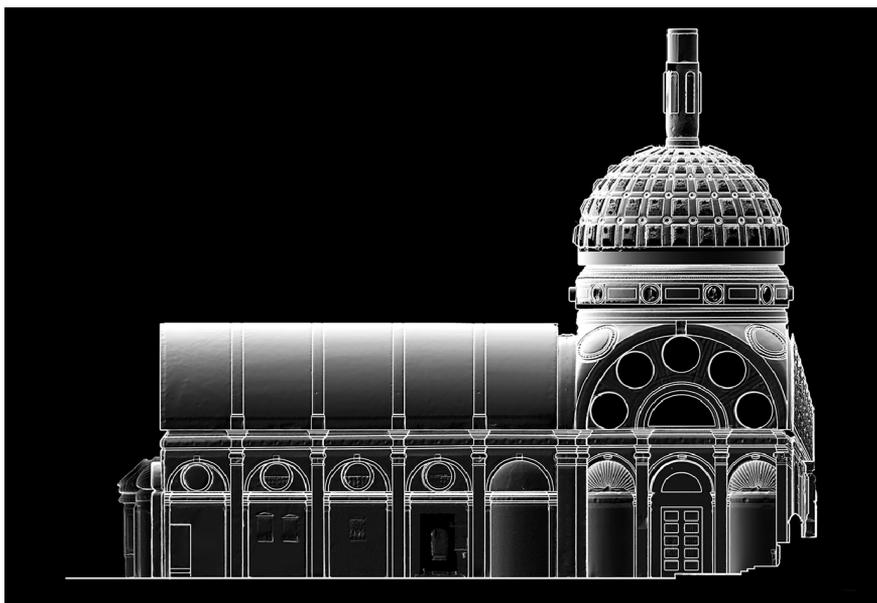


Fig.25a Rilievo dello stato di fatto, restituzione delle sezioni significative.

Le scansioni tridimensionali forniscono dati cospicui e precisi, ma le nuvole di punti non costituiscono un modello tridimensionale immediatamente disponibile all'analisi geometrica della prospettiva accelerata, basata sulla collimazione dei punti reali del finto coro con quelli del modello ideale. Pertanto, è stato necessario trasformare la nuvola di punti in un modello mesh (Fig.24a e Fig.24b), il cui livello di dettaglio fosse un compromesso tra la gestibilità computazionale e la precisione richiesta dalla ricerca, con una densità poligonale elevata nel coro e meno per il resto dell'architettura. La sovrapposizione dei pixel fotografici resi disponibili dalla stessa scansione con nuvola con dato colore alla mesh rielaborata è stata fondamentale per individuare i punti cospicui da collimare anche dove la densità era minore.

Nella restituzione si è scelto di privare le superfici dalle pitture decorative, ottenendo un modello 'neutro' che permettesse una lettura oggettiva e puntuale dell'articolazione plastica delle strutture murarie, per mettere in evidenza e facilitare lo studio delle caratteristiche geometriche e di eventuali anomalie (Fig.25a e Fig.25b).

Sia la verifica delle ipotesi precedenti che la ricerca del punto di vista si basano sui dati forniti da un rilievo digitale accurato, integrato dal rilievo diretto degli elementi principali, che fornisce un'indicazione immediata e utile a individuare le tolleranze da osservare.

- *Verification of the geometric correspondence concerning the axes for identifying construction anomalies.*
- *The identification of the collimation points of the solid perspective with the virtual chorus.*
- *The identification of the primary ray line.²³*
- *The construction of the virtual chorus with the length of the transept, according to the theoretical design model.*
- *The definition of the intersection circle of the collimation lines.*
- *The verification comparison with the reference grid based on the construction metric unit.*

The direct survey highlighted the metric regularity in the nave and transept rhythmic scanning, with a difference of 2 Milanese feet in width and the consequent 'elongation' of the cross vault, surmounted by a dome resting on an oval cornice.

The instrumental survey confirmed an essential constructive precision, accompanied, however, by some critical anomalies (Fig.26a e Fig.26b) hidden by the ornamental apparatus:

- *The misalignment of the nave concerning the choir.*
- *The different offsets of the transept concerning the nave and chancel, as well as the slight deviation of the transept.*
- *A marked and unnoticed asymmetry of the choir and pilasters that define the perspective framework.*
- *The circular base of the dome is hemispherical and disguised by the overhang of the oval cornice inserted into the trapezoidal plan of the transept.*

The greater width of the transept, already appreciable in the point cloud, and the slight deviation of its axis from the perpendicular to that of the nave, are concealed by the different projections of the drum cornice on the two axes and the raising of the arches centre and vaulting of the nave and false choir.

The false vault is divided into ten lacunars with the impost at the linear cornice, lower than the diameter. Developed on the direct circumference, the panels are 19, as a consequence of the elevation of the arch itself and

²³ *The observer's central ray or optical axis is the line orthogonal to the frame passing through the viewpoint, which in this case is horizontal and is the only variable that can be determined precisely (Saccardi 1989, p. 236).*

I passaggi salienti sono stati:

- Il montaggio delle 24 nuvole di punti prodotte dalle scansioni necessarie al rilievo dell'interno della chiesa.
- La rielaborazione del modello mesh con la ricucitura delle lacune nelle zone d'ombra.
- La restituzione del rilievo diretto e la sua sovrapposizione alla sezione orizzontale della nuvola con la verifica degli 'errori' di costruzione.
- La verifica della corrispondenza geometrica rispetto agli assi per l'individuazione delle anomalie costruttive.
- L'individuazione dei punti di collimazione della prospettiva solida con il coro virtuale.
- L'individuazione della retta del raggio principale.²³
- La costruzione del coro virtuale con la lunghezza del transetto, secondo il modello progettuale teorico.
- La definizione dell'intorno di intersezione delle rette di collimazione.
- Il confronto di verifica con la griglia di riferimento basata sull'unità metrica della costruzione.

Il rilievo diretto ha evidenziato la regolarità metrica nella scansione ritmica della navata e del transetto, con una differenza di 2 piedi milanesi nella loro larghezza e il conseguente 'allungamento' della crociera, sovrastata da una cupola appoggiata su un cornicione ovale.

Il rilievo strumentale ha confermato questa precisione costruttiva di base, accompagnata però dalle seguenti importanti anomalie (Fig.26a e Fig.26b) dissimulate dall'apparato ornamentale:

- Il disassamento della navata rispetto al coro.
- Il diverso disassamento della crociera rispetto a navata e coro a causa della leggera deviazione del transetto.
- Una marcata quanto inavvertita asimmetria del coro e delle paraste che definiscono il quadro.
- La base circolare della cupola, emisferica, dissimulata dall'aggetto del cornicione ovale inserito nella pianta trapezoidale della crociera.

²³ Il raggio principale o asse ottico dell'osservatore è la retta ortogonale al quadro passante per il punto di vista, che in questo caso è orizzontale ed è l'unica variabile determinabile con esattezza (Saccardi 1989, p. 236).

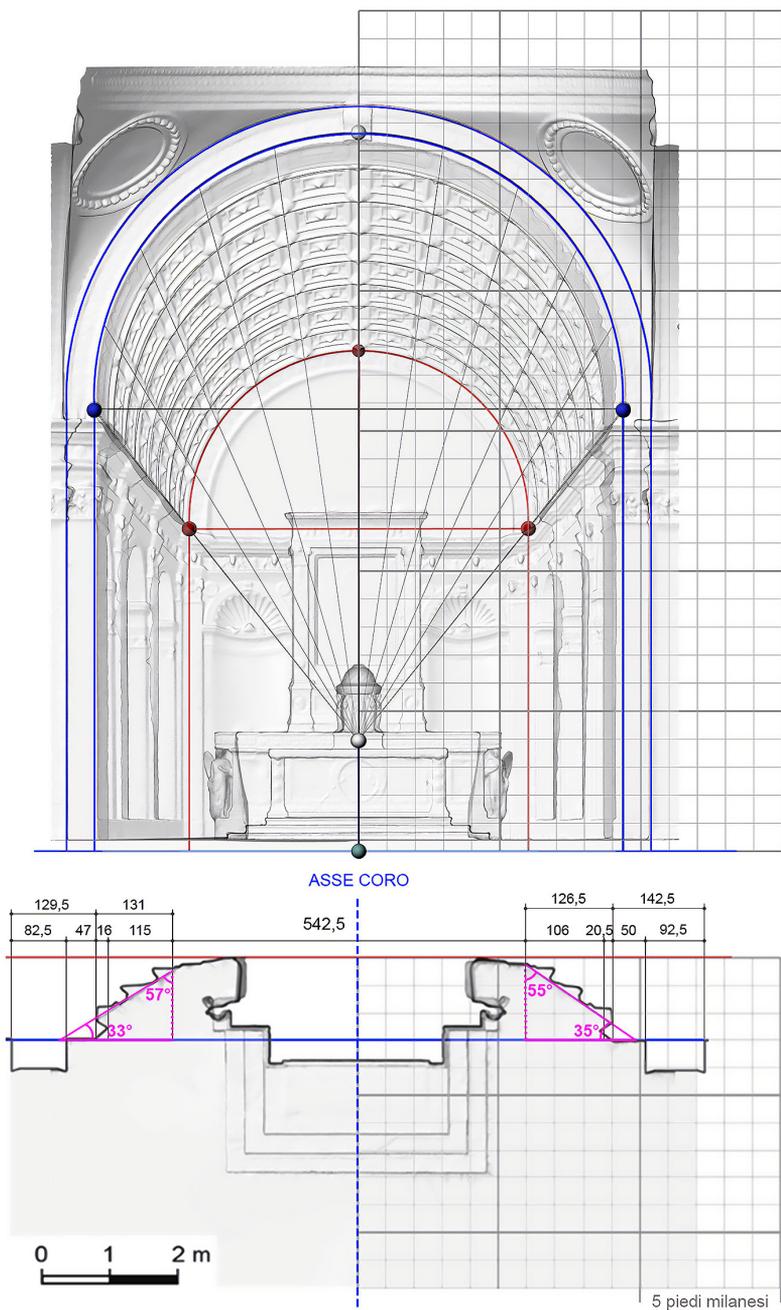


Fig. 26a Geometrical and construction irregularities: the angle in the plan compensates for the different widths of the pillars by keeping the altar in the centre and integrating the asymmetry of the choir.

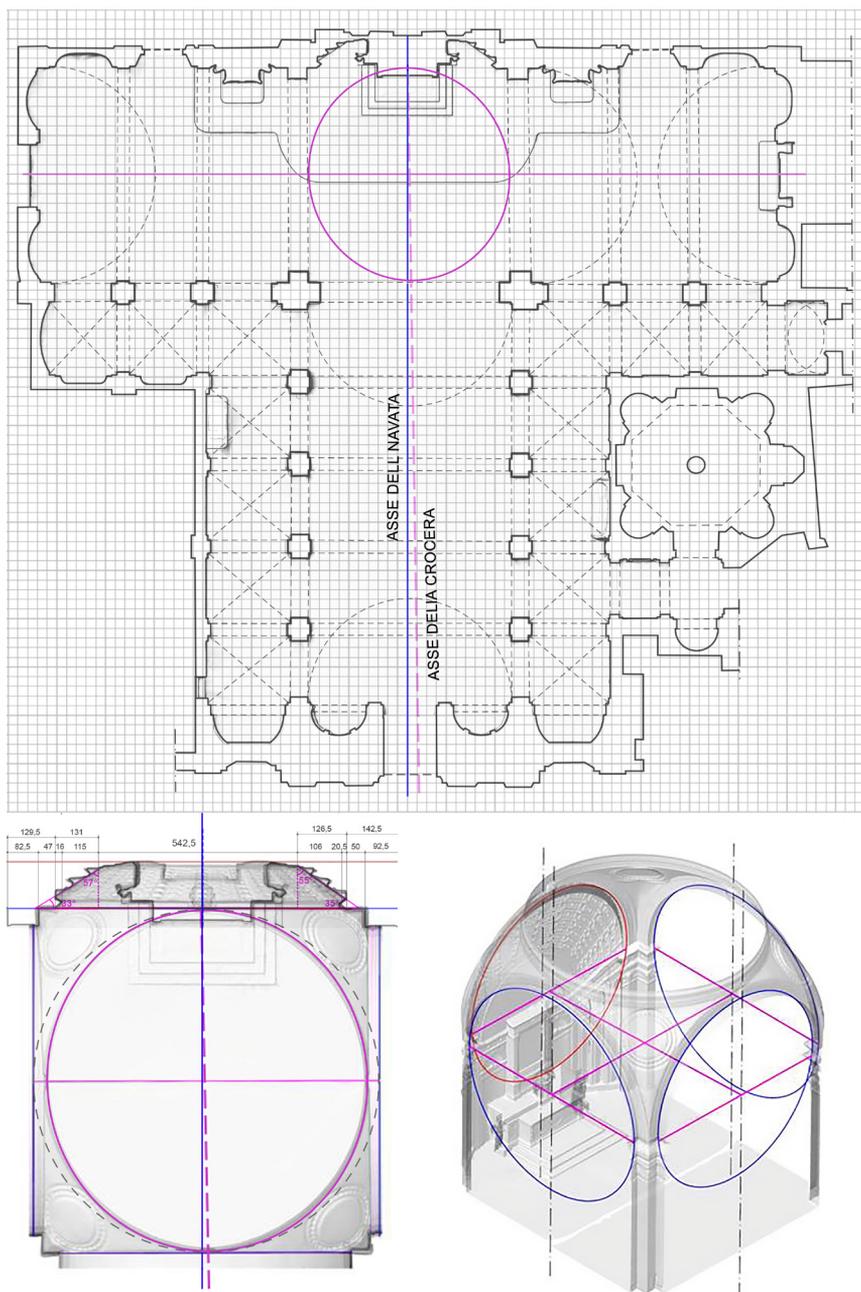


Fig. 26b Irregolarità geometriche e costruttive, l'angolo in pianta compensa la diversa larghezza dei pilastri mantenendo l'altare al centro ed integrando l'asimmetria del coro.

the choice of placing the cornice in the keystone instead of the patera, as Alberti does in Sant'Andrea in Mantua, unlike the pictorial examples on the model of Masaccio's Trinity. This solution contradicts the constructive custom of the coffered vault. Still, it allows the wooden choir frames to correspond with the false capitals, avoiding cutting the lacunars and aligning the frame corresponding to the top of the arc with the ashlar in the key of the cross vault, emphasising the axis to optimise the perspective trick. On the contrary, the painted false coffers decorating the nave vault take up the pictorial model, reversing roles between reality and fiction.

The laser survey also emphasises the asymmetry between the architecture and the choir; whose vertical axis is shifted by 5 cm between the picture (assumed to be on the forward plane and the back) and the misalignment of the two cross arches on the nave by approximately 16 cm, which makes it difficult to determine the main distance between the two halves unambiguously. At the same time, the different widths do not allow for the direct reconstruction of the virtual choir from the transept's scan, forcing the nave's readjustment. The asymmetry is revealed in the three-dimensional collimation of the choir's conspicuous points with its virtual architecture, reconstructed from the nave due to the different transept's widths, which showed the geometric irregularity in the distinct intersections of the visual rays with the axis of the nave in the two halves. The two surveys identify with sufficient precision the main point on the axis with the competition point of alignments of the lacunars, fixing the horizon at a height very close to the ideal value suggested by the treatise, verified taking into account the rise of the floor, invalidating the previous hypotheses of Bruschi and Robbiani.

The scanning of the side and transept aisle is the same, but there is a difference in the width, which is 2 feet greater in the transept than in the nave. This irregularity is in addition to the slight offset of the nave about the choir, so the transept is not square, but trapezoidal. The vertical axis is offset by 5 cm between the bottom of the choir and the projecting plane of the pilasters. The offset of the two cross vaults on the nave, evident in the axial photographs, is approximately 16 cm.

The dimensional variations of the decorative elements simulating the pillars are relevant concerning their theoretical reconstruction but utterly negligible in the overall perception. The most remarkable diversity is found in the 10 cm difference in the width of the two masonry pillars delimiting the choir. The ornamental apparatus, such as the dome's circular base on the transept's irregular plan, hides these and other executive anomalies. The greater width of the transept and the deviation of its axis concerning the

La maggiore larghezza del transetto, già apprezzabile nella nuvola di punti per l'impossibilità di collimazione delle rette di profondità della navata con quelle del coro, e la leggera deviazione del suo asse rispetto alla perpendicolare a quello della navata, sono dissimulate dalla diversa sporgenza del cornicione del tamburo sui due assi e dal rialzamento di un piede del centro degli archi e della volta della navata e del finto coro per mantenere i cervelli alla stessa quota. La finta volta è divisa in 10 lacunari con l'imposta in corrispondenza della cornice lineare, più bassa del diametro. Sviluppate sulla circonferenza direttrice le formelle risultano 19, come conseguenza del rialzamento dell'arco stesso e della scelta di posizionare in chiave la cornice al posto della patera, come fa Alberti nel Sant'Andrea di Mantova, diversamente dagli esempi pittorici sul modello della Trinità di Masaccio. Questa soluzione contraddice la consuetudine costruttiva della volta cassettonata, ma permette di avere le cornici del coro ligneo in corrispondenza dei falsi capitelli, evitando il taglio dei lacunari e di allineare la cornice corrispondente al cervello con il concio in chiave dell'arco della crociera, sottolineando l'asse per ottimizzare l'inganno prospettico. Al contrario i finti cassettoni dipinti che decorano la volta della navata riprendono il modello pittorico, con un'inversione di ruoli tra realtà e finzione.

Il rilievo laser sottolinea anche due asimmetrie. La prima è tra architettura e coro, il cui asse verticale risulta spostato di 5 cm. tra il quadro (assunto sul piano avanzato) e il fondo. La seconda invece è data dal disassamento dei due archi della crociera sulla navata di circa 16 cm., che rende difficoltosa la determinazione univoca della distanza principale tra le due metà, mentre la larghezza differente non permette la ricostruzione diretta del coro virtuale dalla scansione del transetto, forzando al riadattamento della navata. L'asimmetria del coro si palesa nella collimazione tridimensionale dei punti cospicui del coro con la sua architettura virtuale, ricostruita a partire dalla navata per la differente larghezza del transetto, che ha evidenziato l'irregolarità geometrica nella diversa intersezione dei raggi visuali con l'asse della navata nelle due metà. Il duplice rilievo individua con sufficiente precisione il punto principale in asse al punto di concorso degli allineamenti dei lacunari della finta volta, fissando l'orizzonte ad una quota molto prossima al valore ideale suggerito dalla trattatistica, verificato tenendo conto del rialzo del pavimento. La scansione delle campate laterali di navata e transetto è la stessa, ma c'è una differenza nella larghezza, che nel transetto è maggiore di 2 piedi rispetto alla navata. Questa irregolarità si aggiunge al lieve disassamento della navata rispetto al coro, per cui la crociera non è quadrata, ma trapezoidale. L'asse verticale risulta

perpendicular to that of the nave, appreciable on the laser relief rendering, are dissimulated by the different projections on the two orthogonal axes of the cornice that covers the tambour attachment and by the raising of one foot of the centre of the arches and vaulting of the nave and the false choir, which serves to bring the top of the arcs to the same level. Another peculiarity is a false vault divided into ten lacunars, with the springer at the linear frame and a rib in the key instead of a coffer. Developed on the generating circumference, the tiles would be 19 and not 20, so the full vault is raised above the springer, with a rib in the key. At the same time, there is a row of lacunars in the nave and transept, reversing the position relationship between support (ribs) and closure (lacunars).

In addition to accommodating the different construction qualities between real and virtual architecture, this solution allows the wooden choir cornices to correspond with the false capitals, avoiding cutting the lacunars. In this way, the choir tiles adopt the ashlar's width in the cross-vault's keystone and, seen in perspective, simulate the size of those painted in the nave, helping to optimise the deception.

More complex is the determination of the point of view, placed on the horizontal axis at the main point height. There are few possible alignments due to the approximation of the fake choir plastic apparatus: the perspective pilasters simulating the pillars present considerable dimensional variations. The maximum displacement is found in the pilasters that delimit the choir and define the perspective framework, which differs by 10 cm. (82.5 cm. on the left; 92.5 cm. on the right). Rather than construction inaccuracies, this asymmetry can be traced back to a series of compromising adaptations to the pre-existence, aimed at finding the most effective solution and from which it is impossible to disregard when analysing the perspective reconstruction, for which there is no reference below the horizon level. As Robbiani pointed out, the floor of the choir is not in perspective. However, it is beyond the painting and is justified by the need to ensure visual continuity between reality and fiction. The irregularities the relief highlights make it challenging to determine the design point of view unambiguously. This does not invalidate the value of the perspective construction but confirms Bramante's care in using the available space to obtain an excellent plastic-figurative rendering, demonstrating the architectural potential of linear perspective that in the following two centuries would be expressed through the developments of scenotechnics, quadraturism, ephemeral architecture and theoretical reflections on the proportions of buildings.

At the time of writing this text, no other authors have carried out perspective investigations and references to the existence of hypotheses other than

spostato di 5 cm. tra il fondo del coro e il piano di aggetto delle paraste. Il disassamento dei cervelli dei due archi della crociera sulla navata, evidente nelle fotografie assiali, è di circa 16 cm.

Le variazioni dimensionali degli elementi decorativi che simulano i pilastri sono rilevanti rispetto alla loro ricostruzione teorica, ma del tutto trascurabili nella percezione d'insieme. La diversità maggiore si riscontra nei 10 cm. di differenza nella larghezza dei due pilastri in muratura che delimitano il coro, che differiscono di 10 cm. Queste ed altre anomalie esecutive sono dissimulate dall'apparato ornamentale, come la base circolare della cupola sulla pianta irregolare della crociera. La maggiore larghezza del transetto e la deviazione del suo asse rispetto alla perpendicolare a quello della navata, apprezzabili sulla restituzione del rilievo laser, sono dissimulate dalla diversa sporgenza sui due assi ortogonali del cornicione che copre l'attacco del tamburo e dal rialzamento di un piede del centro degli archi e della volta della navata e del finto coro, che serve a portare i cervelli alla stessa quota.

Un'altra particolarità è la finta volta divisa in 10 lacunari, con l'imposta in corrispondenza della cornice lineare e un costolone in chiave invece di un cassettoni. Sviluppate sulla circonferenza generatrice le formelle sarebbero 19 e non 20, di conseguenza la volta a pieno sesto è rialzata rispetto all'imposta e in chiave c'è un costolone, mentre nella navata e nel transetto c'è una fila di lacunari, invertendo la relazione di posizione tra sostegno (nervatura) e chiusura (lacunari).

La soluzione, oltre ad assecondare la diversa qualità costruttiva tra architettura reale e virtuale, permette di avere le cornici del coro ligneo in corrispondenza dei falsi capitelli, evitando il taglio dei lacunari. In questo modo le formelle del coro riprendono la larghezza del concio in chiave dell'arco della crociera e, viste in prospettiva, simulano la dimensione di quelle dipinte nella navata, contribuendo a ottimizzare l'inganno.

Più complessa è la determinazione del punto di vista, posto sull'asse orizzontale alla quota del punto principale. Infatti, gli allineamenti possibili non sono molti per l'approssimazione dell'apparato plastico del finto coro: le lesene prospettiche che simulano i pilastri presentano variazioni dimensionali rilevanti. Lo spostamento massimo si ritrova nelle paraste che delimitano il coro e definiscono il quadro prospettico, che differiscono di 10 cm. (82,5 cm. il sinistro; 92,5 cm. il destro). Più che ad imprecisioni costruttive, questa asimmetria è riconducibile ad una serie di adattamenti compromissori alle preesistenze, tesi alla ricerca della soluzione più efficace e dai quali non è possibile prescindere nell'analisi della ricostruzione prospettica, per la quale manca ogni riferimento sotto la

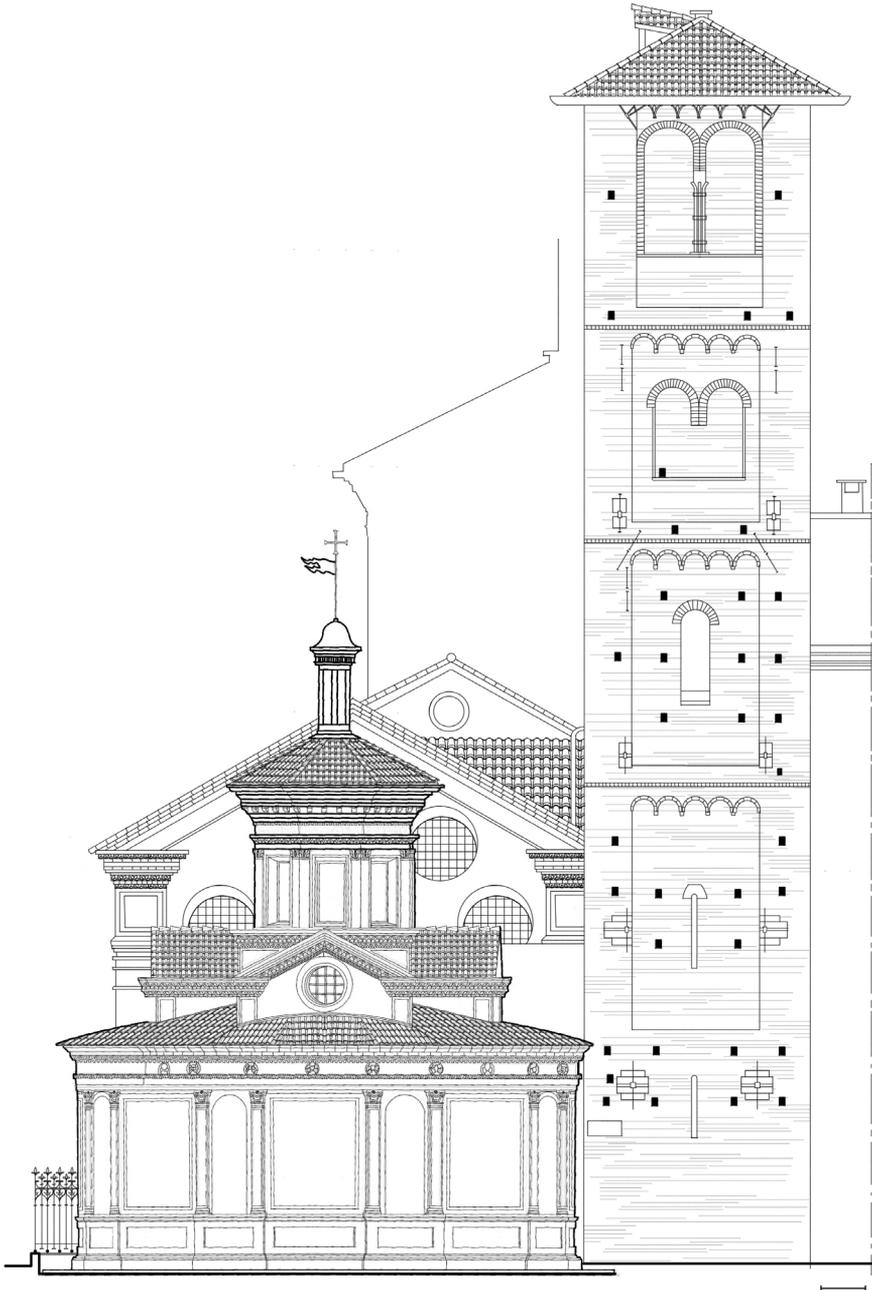


Fig. 27 Il sacello di San Satiro ed il campanile, fronte est.

The Sacellum of San Satiro and the bell tower, east front.

quota dell'orizzonte. Infatti, come ha sottolineato Robbiani, il pavimento del coro non è in prospettiva, sebbene sia oltre il quadro e si giustifica con la necessità di garantire la continuità visiva tra realtà e finzione. Le irregolarità evidenziate dal rilievo rendono difficile la determinazione univoca del punto di vista progettuale. Ciò non inficia il valore della costruzione prospettica, ma conferma la cura di Bramante nell'utilizzare lo spazio a disposizione per ottenere una buona resa plastica figurativa, dimostrando le potenzialità architettoniche della prospettiva lineare che nei due secoli successivi si sarebbero espresse attraverso gli sviluppi della scenotecnica, del quadraturismo, dell'architettura effimera e delle riflessioni teoriche sulle proporzioni degli edifici.

Alla stesura di questo testo non risultano altri autori che abbiano effettuato indagini prospettiche e/o riferimenti all'esistenza di ipotesi diverse da quelle citate.

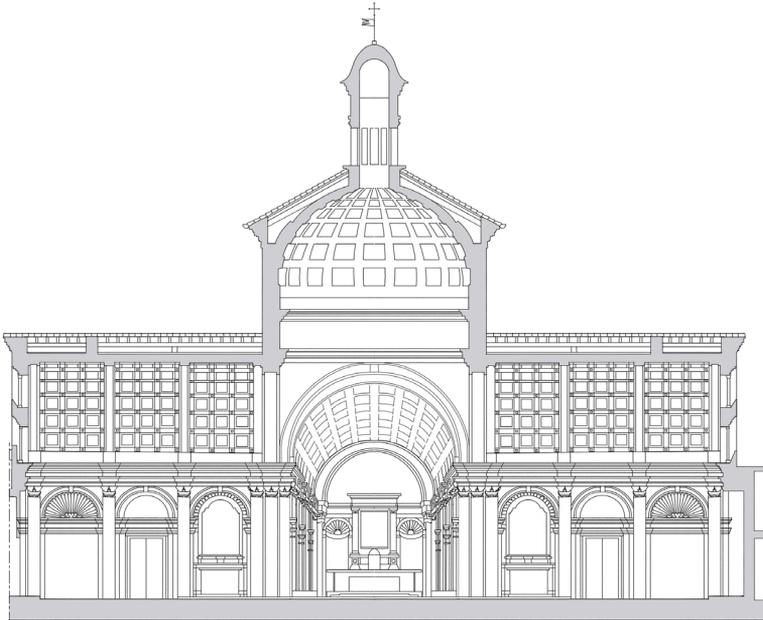


Fig. 28 (sopra) Santa Maria, fronte su via Falcone e (sotto) sezione laterale del transetto.

(above) Santa Maria, front on Via Falcone and (below) side section of the transept.

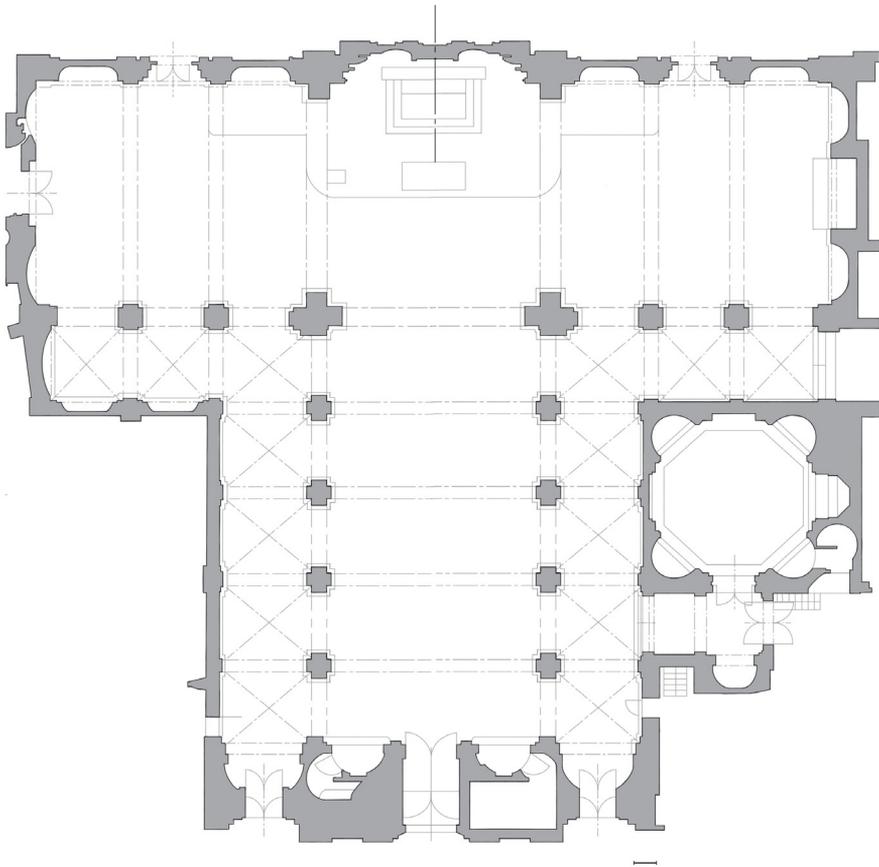


Fig. 29 Santa Maria presso San Satiro, planimetria del complesso.

Complex of Santa Maria at San Satiro, lay-out.

CONCLUSION. PERSPECTIVE AND ACTUAL SPACE

Beginning with Sebastiano Serlio, critics have often emphasised that Bramante was first a painter and only later became an architect²⁴.

The artist from Urbino was among the first to combine the skills of the architect and the perspective painter, certainly the first capable of making them inseparable in the concrete demonstration of the effective potential of linear perspective in creating architecture and not only its representation. This poetic potential of space would explode in the following centuries through the developments of stagecraft and Quadraturism, leaving an important legacy to architecture and other spatial arts. These also include the Architectural Perspective, which is the design synthesis of architecture and pictorial decoration in the transformation of perceived space concerning built space, through which he simulates the experimentation of a central plan layout that projects him into the contemporary design debate on the articulation and proportioning of buildings that will result in the Roman Fabbrica of San Pietro.

Lombard's beginnings testify to a gradual transition from represented to built architecture, passing through the geometric control of visualised space from its representation in an image that materialises in an immersive reality. The genesis of the choir of Santa Maria at San Satiro, a subtle interpretation of the relationship between form and perception, integrates the two antithetical aspects of physical and figurative space. The choir is not a pictorial solution but a three-dimensional invention, a unique work resulting from an unprecedented experimental approach that remains unequalled in its ability to create a virtual space within an actual construction.

Rhythms and proportions of the design intention result from comparing the experienced space with the actual architecture. It isn't easy to distinguish the two levels along the approach to the altar.

Bramante uses wall thickness to develop the perspective layout three-dimensionally, using the same materials, colours, and ornamental motifs found in the building. Compared to the pictorial work, it is not necessary to delineate false shadows: chiaroscuro is obtained naturally, defined by the light coming from the dome's lantern, which affects the reliefs of the coffered ceiling, cornices and false arches. He develops the fourth arm of a cruciform layout in a reduced real depth, delimited by three bays open to small naves or closed by depressed niches. This restores compositional

²⁴ Cfr. Serlio 1545, Il Secondo Libro..., p. 25v.

CONCLUSIONI. PROSPETTIVA E SPAZIO REALE

A cominciare da Sebastiano Serlio, la critica ha spesso sottolineato il fatto che Bramante fu prima pittore e divenne architetto solo in seguito²⁴. L'artista urbinato è stato tra i primi a coniugare le competenze dell'architetto e del prospettico, sicuramente il primo capace di renderle inscindibili nella dimostrazione concreta delle potenzialità effettive della prospettiva lineare nella creazione dell'architettura, e non solo della sua rappresentazione. Queste potenzialità poietiche dello spazio esploderanno nei secoli successivi attraverso gli sviluppi della scenotecnica e del Quadraturismo, lasciando un'eredità importante all'architettura e alle altre arti spaziali. Tra queste rientra anche la Prospettiva Architettonica, che è la sintesi progettuale di architettura e decorazione pittorica nella trasformazione dello spazio percepito rispetto a quello costruito, attraverso la quale simula la sperimentazione di un impianto a pianta centrale che lo proietta nel dibattito progettuale contemporaneo sull'articolazione e proporzionamento degli edifici che sfocerà nella fabbrica romana di San Pietro.

Gli esordi lombardi testimoniano un passaggio graduale dall'architettura rappresentata a quella edificata, passando attraverso il controllo geometrico dello spazio visualizzato dalla sua rappresentazione in un'immagine che si materializza in una realtà immersiva. La genesi del coro di Santa Maria presso San Satiro, sottile interpretazione del rapporto tra forma e percezione, integra i due aspetti antitetici dello spazio fisico e di quello figurato. Il coro non è una soluzione pittorica ma un'invenzione tridimensionale, un'opera unica, risultato di un approccio sperimentale inedito e rimasto ineguagliato nella capacità di creare uno spazio virtuale all'interno di una costruzione reale.

Ritmi e proporzioni dell'intenzione progettuale risultano dal confronto dello spazio esperito con l'architettura effettiva. Difficile distinguere i due livelli lungo il percorso di avvicinamento all'altare.

Bramante sfrutta al massimo lo spessore murario per sviluppare tridimensionalmente l'impianto prospettico e utilizza gli stessi materiali, gli stessi colori e gli stessi motivi ornamentali presenti nell'edificio. Rispetto all'opera pittorica non è necessario delineare finte ombre: il chiaroscuro è ottenuto naturalmente, definito dalla luce proveniente dalla lanterna della cupola che incide sui rilievi del cassettonato, delle cornici e dei finti archi. In una profondità reale ridotta, egli sviluppa il quarto braccio di un

²⁴ Cfr. Serlio 1545, *Il Secondo Libro...*, p. 25v.

balance to the dome, dominating an asymmetrical layout, thus recovering its centralising function.

In Santa Maria at San Satiro, Bramante does not illusionistically resolve a wall or a room, but the design of a complex organism of large dimensions realised within a building with a shape other than the ideal one. All this is thanks to an innovative and skilful use of perspective science, allowing him to experiment with instruments capable of altering the perception of physical space, anticipating the immersive effects of digital technologies by centuries.

The survey with digital instruments allowed the reconstruction of the actual geometry to understand the perspective relationship between the perceptual space and the constructed building, highlighting the existence of an improper anamorphosis that collimates the perspective of the chancel with that of the nave and makes the illusionistic artifice effective along the entire length of the nave, from the entrance to the point of projection of the fake chancel.

The double perspective device highlights the centrality of a design conception that aims at perfection expressed by numbers that reveal golden sequences and relationships. These define the interior from the perspective that generates the visible space and regulates the articulation of the double real and virtual architecture, according to a proportioning that the aesthetic architectural theory of the time referred to as divine perfection.

The study of the factory allows us to hypothesise that Bramante applied a procedure of extreme simplicity, directly derived from the perspective method described by Alberti, the basis of which is the geometric structure of Renaissance 'cubic space'. The conception of a regular square grid made it possible to conceive space as a function of form, number and measure, pursuing the perfection of design in the organic proportioning of the parts in the whole.

What is the actual architecture in a design based on the simulation of a space other than the one materialised by the wall? It matters little to distinguish between the space-born of construction and that generated by the projection of a perspective. In San Satiro, Bramante demonstrates a knowledge that integrates architecture and painting into a unified result.

impianto cruciforme, delimitato da tre campate aperte su navatelle o chiuse da nicchie depresse, che restituisce equilibrio compositivo alla cupola che domina un impianto asimmetrico, recuperandone così la funzione centralizzante.

In Santa Maria presso San Satiro, Bramante non risolve illusionisticamente una parete o una stanza, ma il progetto di un organismo complesso di grandi dimensioni, realizzato all'interno di un edificio con una forma diversa da quella ideale. Tutto questo grazie a un uso innovativo e sapiente della scienza prospettica, che gli permette di sperimentare strumenti capaci di alterare la percezione dello spazio fisico, anticipando di secoli gli effetti immersivi delle tecnologie digitali.

Il rilievo con strumenti digitali ha permesso di ricostruire la geometria reale per comprendere il rapporto prospettico tra lo spazio percettivo e l'edificio costruito evidenziando l'esistenza di una anamorfosi impropria che collima la prospettiva del coro con quella della navata e rende efficace l'artificio illusionistico nell'intero percorso della navata, dall'ingresso al punto di proiezione del finto coro.

Il doppio dispositivo prospettico evidenzia la centralità di una concezione progettuale che mira alla perfezione espressa da numeri che rivelano sequenze e rapporti aurei. Questi definiscono l'interno a partire dalla prospettiva che genera lo spazio visibile e regolano l'articolazione della doppia architettura reale e virtuale, secondo un proporzionamento che la teoria estetico architettonica dell'epoca riferiva alla perfezione divina.

Lo studio della fabbrica permette di ipotizzare che Bramante abbia applicato un procedimento di estrema semplicità, direttamente derivato dal metodo prospettico descritto dall'Alberti, alla cui base c'è la struttura geometrica dello 'spazio cubico' rinascimentale. La concezione di un reticolo regolare a maglia quadrata consentiva di concepire lo spazio in funzione di forma, numero e misura, perseguendo la perfezione del disegno nel proporzionamento organico delle parti nel tutto.

Qual'è l'architettura reale, in un progetto basato sulla simulazione di uno spazio diverso da quello materializzato dal muro? Poco importa distinguere tra lo spazio che nasce dalla costruzione e quello generato dalla proiezione di una prospettiva. In San Satiro, Bramante dimostra un sapere che integra architettura e pittura in un risultato unitario.

Linear perspective

Linear perspective is the result of the discovery of a geometric rule for the reconstruction (= representation and measurement) of the space's depth, demonstrated in 1413 by Filippo Brunelleschi, but the result of previous research by Tuscan painters of the 14th century, which allowed the mathematical (exact) representation of infinite space. To demonstrate the correctness of the procedure, Brunelleschi created two panels with the frontal view of the Baptistry of San Giovanni from the threshold of Santa Maria del Fiore and an accidental view of Palazzo Vecchio from the corner of Via Calzaioli. Traces of it remain only in the detailed description reported in the contemporary manuscript of his friend and biographer Antonio di Tuccio Manetti, which allowed its reconstruction.

Modern perspective develops from a set of geometric procedures that allow the reconstruction of the represented space, simulating that of monocular vision. Starting from considerations on similar triangles, already used in classical times to measure inaccessible distances, the painters reconstructed the perspective image as the intersection of the

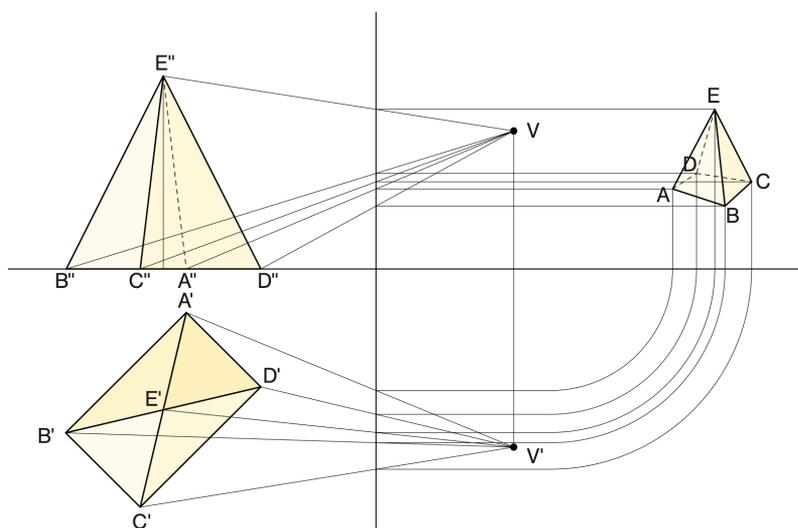


Fig. 30 Metodo del taglio proposto da Piero della Francesca nel suo trattato. L'immagine prospettica si ricava misurando la posizione dei punti di intersezione in pianta e alzato con le proiezioni ortogonali.

The cut method proposed by Piero della Francesca in his treatise. The perspective image is obtained by measuring the position of the intersection points in the plan and elevation with the orthogonal projections.

Prospettiva lineare

La prospettiva lineare è il risultato della scoperta di una regola geometrica per la ricostruzione (= rappresentazione e misura) della profondità dello spazio, dimostrata nel 1413 da Filippo Brunelleschi, ma frutto delle precedenti ricerche dei pittori toscani del 300, che ha permesso la rappresentazione matematica (esatta) dello spazio infinito. Per dimostrare il procedimento geometrico, Brunelleschi realizzò due tavolette con la vista frontale del Battistero di San Giovanni dalla soglia di Santa Maria del Fiore e una vista accidentale di Palazzo Vecchio dall'angolo di via Calzaioli. Ne resta traccia solo nella dettagliata descrizione riportata nel manoscritto coevo del suo amico e biografo Antonio di Tuccio Manetti, che ne ha permesso la ricostruzione.

La prospettiva moderna si sviluppa da un insieme dei procedimenti geometrici che consentono di ricostruire una rappresentazione dello spazio simile a quella della visione monoculare. Partendo da considerazioni sui triangoli simili, già usati in epoca classica per determinare distanze inaccessibili, il pittore ricostruisce l'immagine prospettica come intersezione della piramide visiva con il piano della 'finestra prospettica' interposta tra lui e la scena rappresentata, per questo detto quadro. Il procedimento, indicato come metodo del taglio, viene descritto da Leon Battista Alberti nel manoscritto del *De Pictura* (1435) e ripreso da Piero

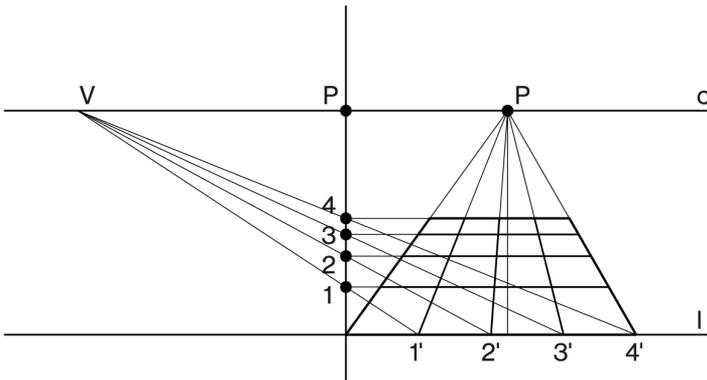


Fig. 31 Metodo della costruzione abbreviata descritto da Leon Battista Alberti nel *De Pictura* come procedura semplificata che permette di misurare direttamente la profondità sulle rette di profondità

Method of abbreviated construction described by Leon Battista Alberti in De Pictura as a simplified method that allows direct measurement of depth on depth lines

visual pyramid with the the 'perspective window' between the observer and the scene to be represented, hence called picture plane. The procedure is described as 'metodo del taglio' (cutting method) by Leon Battista Alberti in his manuscript De Pictura (1435), taken up by Piero della Francesca in the treatise De perspectiva pingendi, written after 1460 in vernacular language and printed in 1482. It fixes the starting point of the discoveries that led to the generalization of perspective as a conical projection, referred to a horizontal plane, with respect to which the position of the observer is fixed.

Today, perspective is meant as one of the representation methods of Descriptive Geometry (Monge 1798) that is a graphic derivation of Projective Geometry (Desargues 1643), which allows the mathematical representation of space, thanks to plane projections of all its infinite points. Its starting point is the introduction of improper entities (points, lines and planes placed 'at infinite distance'), distinguishing conical projections (from proper center) and cylindrical projections (from improper center). Applied perspective fits into the general system as a conical projection, whose perspective point and picture frame are referred to the horizontal plane, to which the angle of the vertical inclination of the projection plane (picture plane) are measured. Renaissance painters applied rather the central projection on a vertical plane in a one-point perspective, even describing methods for the representation of objects otherwise oriented.

della Francesca nel suo trattato *De perspectiva pingendi*, scritto in volgare dopo il 1460 e pubblicato a stampa nel 1482. Esso costituisce il punto di partenza delle scoperte che hanno condotto alla generalizzazione della prospettiva come proiezione conica, riferita ad un piano orizzontale, rispetto al quale fissare la posizione dell'osservatore.

Oggi la prospettiva è uno dei metodi di rappresentazione descritti dalla Geometria Descrittiva (Monge 1798), derivazione grafica della Geometria Proiettiva (Desargues 1643), che permette la rappresentazione matematica dello spazio, grazie a proiezioni piane di tutti i punti dello spazio infinito. Alla base c'è l'introduzione degli enti impropri (punti, rette e piani posti 'a distanza infinita'), distinguendo proiezioni coniche (da centro proprio) e proiezioni cilindriche (da centro improprio). La prospettiva applicata si inquadra nel sistema generale come una proiezione conica riferita al piano orizzontale, rispetto al quale si misura l'angolo dell'inclinazione verticale del piano di proiezione (quadro).

La prospettiva rinascimentale privilegia la rappresentazione dello spazio in proiezione centrale su piano verticale, pur descrivendo metodi per la rappresentazione di oggetti comunque orientati.

GLOSSARY

- Station point (V)
The projection center corresponding to the position of the observer's eye; it is identified in plan by the position on the geometric plane and vertically by the height of the horizon line.
- Ground plane (π')
Horizontal plane to which all the elements of perspective are referred, in particular the independent variables (point of view and principal ray) that condition the perspective image.
- Picture plane (π)
Projection plane on which the perspective image is constructed, conceived as a window placed between the scene and the painter.
- Main visual ray
The visual ray that is perpendicular to the picture plane, defining its position and inclination with respect to the horizon plane; it distinguishes one/two-point perspective (vertical picture plane) and three-point perspective (inclined picture plane); the horizontal angle with respect to the main directions of the scene represented differentiates the central p . (orthogonal lines respectively parallel and orthogonal to the picture plane) from the accidental p . or corner p . (orthogonal lines inclined at will with respect to picture plane).

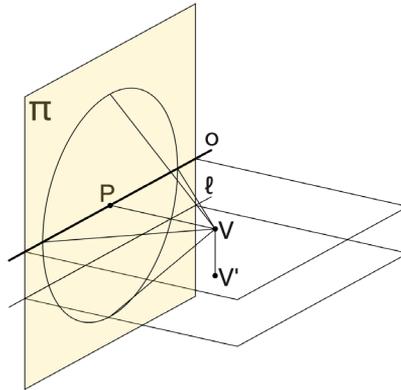


Fig 32 L'immagine prospettica è definita dalla posizione del centro V rispetto al quadro π e dalla direzione dello sguardo, espressa dal raggio principale ortogonale, interposto tra la scena e l'osservatore.

The perspective image is defined by the position of the centre V with respect to the frame π and the direction of gaze, expressed by the central orthogonal ray, interposed between the scene and the observer.

GLOSSARIO

- *Punto di vista (V)*
Centro di proiezione, corrispondente alla posizione dell'occhio dell'osservatore; si individua in pianta dalla posizione sul piano geometrico e in verticale dall'altezza dell'orizzonte.
- *Piano geometrico, (π')*
Piano orizzontale al quale vengono riferiti tutti gli elementi della prospettiva, in particolare le variabili indipendenti (punto di vista e raggio principale) che condizionano l'immagine prospettica.

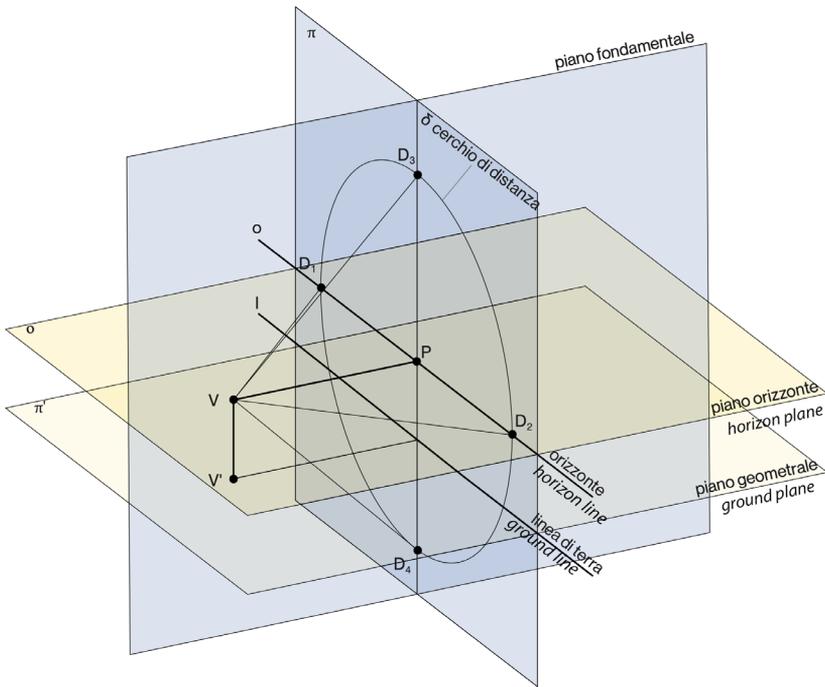


Fig. 33 La prospettiva lineare è una proiezione centrale assimilata alla visione umana, nella quale il sistema proiettivo è riferito ad un piano orizzontale π' , detto piano geometrico, rispetto al quale si definisce la direzione del quadro di proiezione P e la posizione del centro V , considerato coincidente con l'occhio dell'osservatore.

Linear perspective is a central projection assimilated to human vision, in which the projective system is referred to a horizontal plane π' , called the geometrical plane, with respect to which the direction of the projection frame P and the position of the centre V , considered coincident with the eye of the observer, is defined.

- Distance VP
Distance between the station point V and the picture plane P; it fits the perspective size, but does not change its view, only depending on the position of V.
- Depth lines
Lines perpendicular to the frame on which the distance of the points from the frame is measured.
- Ground line
Indicated by l , is the line of intersection between the frame and the geometric plane.

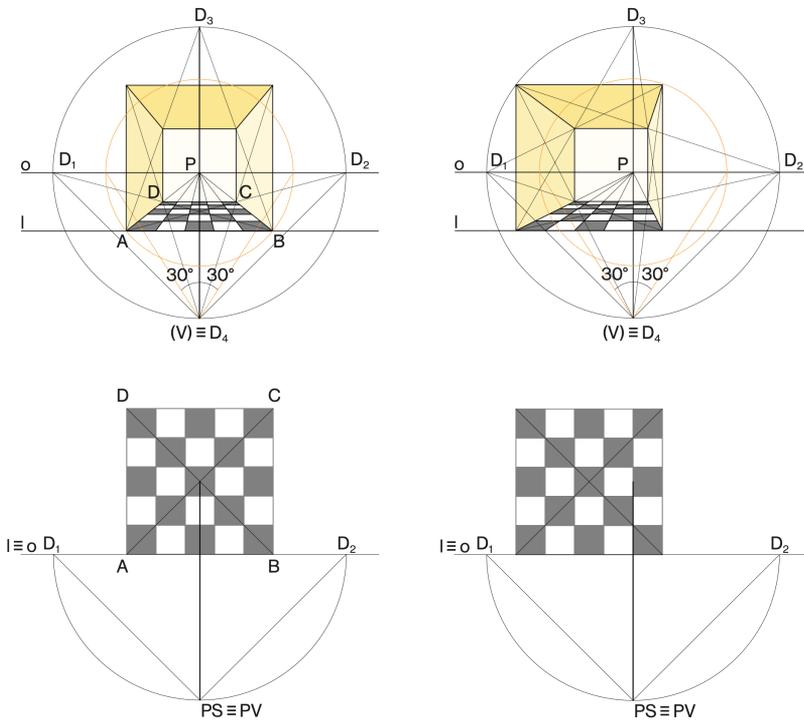


Fig.34 La prospettiva centrale è spesso usata per rappresentare ambienti interni poiché permette di visualizzare 5 superfici contemporaneamente. Inoltre è molto veloce la determinazione della prospettiva del reticolo cubico che misura lo spazio cartesiano.

Central perspective is often used to represent interior spaces, allowing five surfaces to be visualised simultaneously. Determining the perspective of the cubic grid measuring Cartesian space is also very quick.

- *Quadro (π)*
Piano di proiezione sul quale si costruisce l'immagine prospettica, concepito come una finestra posta tra la scena e il pittore; la traslazione del quadro lungo l'asse ottico non altera la prospettiva, ma solo la dimensione della sua immagine.
- *Raggio principale*
Raggio visivo perpendicolare al quadro che ne definisce la giacitura e l'inclinazione rispetto all'orizzonte, permettendo di distinguere tra p. a piano verticale e p. a piano inclinato; l'angolo orizzontale rispetto alle direzioni principali della scena rappresenta la p. centrale (rette ortogonali rispettivamente parallele e ortogonali al quadro) dalla p. accidentale o p. d'angolo (rette ortogonali inclinate a piacere rispetto al quadro).

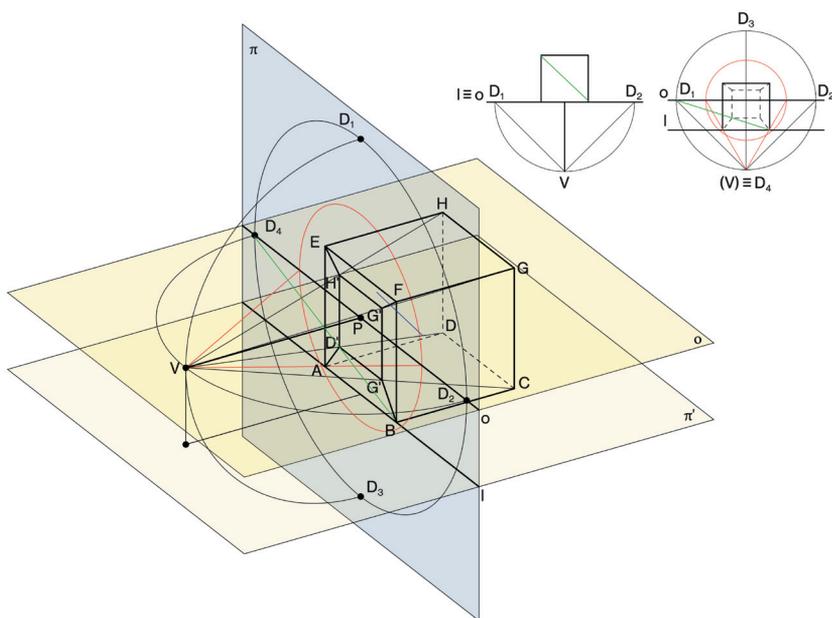


Fig.35 Nella prospettiva centrale le direzioni ortogonali prevalenti sono rispettivamente parallele o ortogonali al quadro, con lo spazio o l'oggetto disposto frontalmente ad un osservatore con lo sguardo fisso su P.

In the central perspective, the prevailing orthogonal directions are respectively parallel or orthogonal to the picture, with the space or object placed in front of an observer with his gaze fixed on P.

- Center of vision
Indicated by P , center of the perspective and point of convergence (vanishing point) of the depth lines, is the foot of the principal ray VP .
- Horizon line
Indicated by o , intersection of the frame with the horizontal plane passing through V ; always parallel to the ground line l .
- Vanishing point/line
Convergence point of parallel straight lines / convergence straight line of parallel planes; it is placed on the picture plane intersection with a parallel line/plane conducted through V .

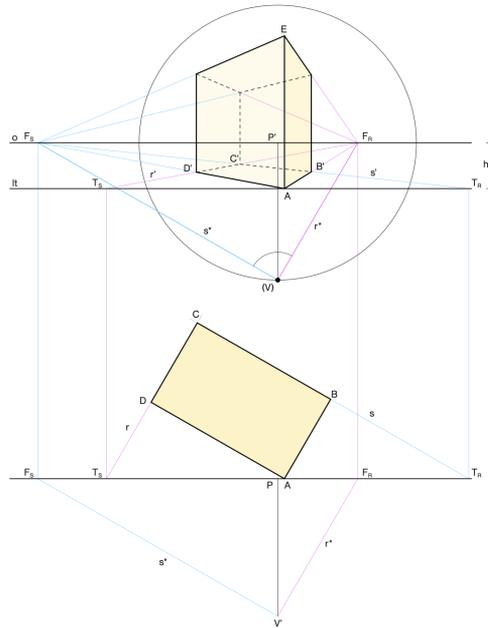


Fig. 36 Nel metodo delle fughe si rappresentano le rette attraverso l'individuazione della fuga (intersezione con il quadro della parallela condotta da V) e della traccia (intersezione con il quadro), punti sempre noti nella proiezione.

In the fugue method, lines are represented by identifying the fugue (intersection with the frame of the parallel led by V) and the trace (intersection with the frame). These points are always known in the projection.

- *Distanza principale*
Distanza del punto di vista V dal quadro, definisce la dimensione dell'immagine prospettica, ma non ne cambia la vista che dipende dalla posizione del V
- *Rette di profondità*
Rette perpendicolari al quadro sulle quali si misura la distanza dei punti dal quadro.
- *Linea di terra*
Indicata con l, è la retta di intersezione tra il quadro e il piano geometricale.
- *Punto principale*
Indicato con P, centro della prospettiva e punto di concorso (fuga) delle rette di profondità, è il piede del raggio principale VP.
- *Linea dell'orizzonte (O)*
Intersezione del quadro con il piano orizzontale passante per V; sempre parallela alla linea di terra l.

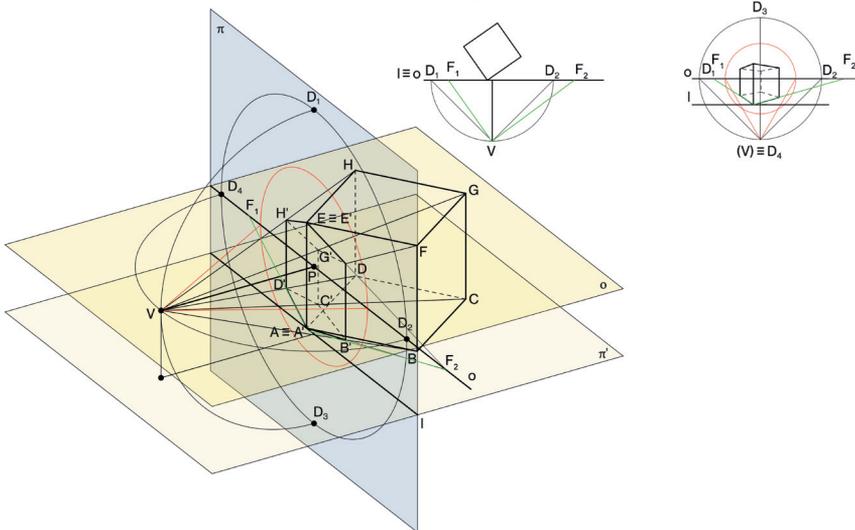


Fig. 37 La prospettiva accidentale utilizza comunque il piano (o quadro) verticale ma le due direzioni principali non sono ortogonali bensì generiche.

Accidental perspective still uses the vertical plane (or frame), but the two main directions are not orthogonal but generic.

- **Visual cone**
Set of visual rays under which an object is observed; natural monocular vision corresponds to a maximum angle of 45°.
- **Cone of vision**
Indicates the 60° angle of the acceptable visual field, considering the mobility of the eye and the widening of the visual field due to the presence of the second eye, it imitates the perspective of a photograph produced by a wide-angle lens.
- **Anamorphosis**
Double perspective projection on two incident planes (not parallel), so that on one of them the image is distorted.
- **Quadratura**
Perspective wall decoration with an architectural subject can alter the visual perception of real space when the observer's position coincides with that of the perspective viewpoint.
- **Accelerated perspective**
The relief perspective can simulate greater depth than actual depth, which changes depending on the observer's stationary point.
- **Vantage point**
Calculated station point, from which the visual perception of a perspective perfectly simulates an estimated depth.

- *Fuga D*
 Detta anche fuoco, punto di concorso delle rette parallele e retta di concorso dei piani paralleli, posta all'intersezione del quadro con la retta parallela (piano parallelo) condotta per V.
- *Cono visuale*
 Insieme dei raggi visivi sotto cui si osserva un oggetto; la visione naturale monoculare corrisponde ad un angolo massimo di 45°.
- *Cono ottico*
 Indica l'angolo di 60° del campo visivo accettabile, considerando la mobilità dell'occhio e l'allargamento del campo visivo per la presenza del secondo occhio, risulta assimilabile alla prospettiva di una fotografia prodotta da un grandangolo.
- *Anamorfosi*
 Doppia proiezione prospettica su due piani distinti, in genere incidenti (non paralleli) per cui su uno di essi l'immagine si distorce.
- *Quadratura*
 Decorazione parietale prospettica a soggetto architettonico capace di alterare la percezione visiva dello spazio reale quando la posizione dell'osservatore coincide con quella del punto di vista della prospettiva.
- *Prospettiva accelerata*
 Prospettiva a rilievo capace di simulare una profondità maggiore di quella effettiva, che muta a seconda del punto di stazione dell'osservatore.
- *Punto privilegiato*
 Punto di stazione calcolato, dal quale la percezione visiva di una prospettiva simula perfettamente una profondità calcolata.

Chronology

- 876 – *The Archbishop Ansperto founded a Sacellum in honour of the Saints Ambrose, Sylvester and Satyrus.*
- 879 – *Ansperto's will leaves his property for the foundation of a hospice dedicated to the reception of poor and pilgrims, among which is mentioned a church dedicated to the Saints Satiro and Silvestro, which was already built 'a fundamentis'.*
- 1209 – *The existence of the parish of San Satiro is documented for the first time.*
- 1442 – *Attestation of the miraculous event of the bleeding of the image of the Virgin and Child, painted on the exterior of the building on today's Falcone Street, following a stab to the Child's throat inflicted by a certain Massazio da Vigonzone after losing money at gambling.*
- 1478 – *Guiniforte dei Capitani di Caponago gave some properties to the 'Scuola di Santa Maria presso San Satiro' so that they, with both the ducal and the archepiscopal license, could demolish them to build and finish the construction of a chapel dedicated to the Virgin in the place where the altar with the same dedication already existed at the church of San Satiro.*
- 1480 – *With the factory begun, the School's deputies requested the Dukes of Milan, Bona di Savoia and Galeazzo Maria Sforza, the recognition of the School. On September 4, the dukes confirmed it to the School's chapter.*
- 1482 – *Pietro da Bussero and apprentice Santino da Corbetta completed the tabernacle (majestas seu anchona) on Santa Maria's altar; which was replaced in the 16th century by a smaller one.*
- 1482 – *First version of Santa Maria 'facta e constructa'.*
- 1482 – *Bramante's presence at Santa Maria presso San Satiro is documented for the first time.*
- 1482 – *An extension of the church towards via Torino.*
- 1482 – *Addition of the minor aisles, nave, false choir and Sacristy.*
- 1482 – *Beginning of the pictorial finishing of the false choir and plastic ornamentation of the entire building.*

Cronologia

- 876 – Ansperto decide la costruzione di un sacello in onore dei Santi Ambrogio, Silvestro e Satiro.
- 879 – L'arcivescovo di Milano Ansperto in testamento lascia le sue proprietà per la fondazione di un ospizio per l'accoglienza di poveri e pellegrini, tra queste è ricordata anche una chiesa già edificata '*a fundamentis*' dedicata ai Santi Satiro e Silvestro.
- 1209 – Costruzione della torre campanaria che affianca il Sacello è documentata per la prima volta l'esistenza della parrocchia di San Satiro.
- 1442 – Attestazione dell'evento miracoloso del sanguinamento dell'immagine della Vergine con Bambino, dipinta sull'esterno dell'edificio sull'attuale via Falcone, in seguito a una pugnalata alla gola del Bambino inferta da un certo Massazio da Vigonzone dopo aver perduto denaro al gioco.
- 1478 – Guiniforte dei Capitani di Caponago cede alcune proprietà alla Scuola di Santa Maria presso San Satiro perché, ottenuta la licenza ducale e arcivescovile, le possano demolire per costruire e finire la costruzione della cominciata cappella dedicata alla Vergine dove già esisteva l'altare con la stessa dedicazione presso la chiesa di San Satiro.
- 1480 – A fabbrica iniziata, i deputati della Scuola richiedono il riconoscimento della Scuola ai duchi di Milano, Bona di Savoia e Galeazzo Maria Sforza. Il 4 settembre i duchi confermano i capitoli della Scuola.
- 1482 – Pietro da Bussero e l'apprendista Santino da Corbetta completano il tabernacolo (*majestas seu anchona*) sull'altare di Santa Maria, rimpiazzato nel XVI sec. da uno più piccolo.
- 1482 – Prima versione di Santa Maria '*facta e constructa*'.
- 1482 – Per la prima volta è documentata la presenza di Bramante a Santa Maria presso San Satiro.
- 1482 – Ampliamento della chiesa verso via Torino.
- 1482 – Aggiunta delle navate minori, della navata centrale, del finto coro e della Sacrestia.

- 1483 – *The two transepts are completed, with the main terracotta or painted decoration of the transept, sacristy and nave.*
- 1483 – *Agostino de' Fondulis agrees to make the terracotta frieze in the Sacristy, a decorative terracotta frame and frieze with 'testoni' for the tiburium and finished the Sacellum.*
- 1483 – *Raimondi, in collaboration with Antonio da Pandino, made the vault's decoration of the left transept arm, including the semicircular pediment that closes the cross arm and the vault that obliquely joins the St. Satiro's Sacellum to the church.*
- 1483 – *Addition of the nave and relocation of the altar from the centre of the transept to its present position.*
- 1484\86 – *Work slowed down, perhaps because of the plague that ravaged the city.*
- 1486 – *Amadeo made a marble facade project according to Bramante's indications, which was left unfinished at the basement*
- 1486 – *The construction of the minor naves is completed*
- 1486\98 – *Bramante is responsible for the design and construction of a ducal chapel in the right transept, which was dedicated to St. Theodore*
- 1494 – *Unified painting project by Borgognone, who intervened on several occasions in the decorative parts and figures of saints for the transept niches*
- 1499 – *Bartolomeo Suardi, also known as Bramantino, painted the medallions on the dome's spandrels, and succeeded Bramante, who left for Rome in 1499, in the leadership of the building site*
- 1514 – *Giovanni da Oggiono opened the two doors in the transept, giving the church an exit onto Via Falcone.*
- 1551 – *Creation of the new marble flooring.*
- 1611 – *The report of the pastoral visit of Cardinal Federico Borromeo writes that the church has 44 windows that are partly round and partly rectangular.*
- 1634 – *Work on the exterior of the sacristy where the ground is swampy*
- 1654 – *Consecration of the chapel of St. Anthony of Padua.*

- 1482 – Inizio della finitura pittorica del finto coro e dell'ornamentazione plastica dell'intero edificio.
- 1483 – Sono completati i due transetti, con le principali decorazioni in terracotta o dipinte del transetto, della sacrestia e della navata maggiore.
- 1483 – Agostino de' Fondulis accetta di realizzare il fregio in terracotta della Sacrestia, una cornice decorativa in terracotta e un fregio con 'testoni' per il tiburio e terminare il Sacello.
- 1483 – Raimondi, in collaborazione con Antonio da Pandino, realizza la decorazione della volta del braccio sinistro del transetto, compreso il frontone semicircolare che chiude il braccio di croce e la volta che unisce obliquamente il sacello di S. Satiro alla chiesa.
- 1483 – Aggiunta della navata e spostamento dell'altare dal centro della crociera alla posizione attuale.
- 1484/86 – Rallentamento dei lavori forse a causa della peste che sconvolge la città.
- 1486 – Progetto di facciata in marmo dell'Amadeo, secondo indicazioni di Bramante, rimasto incompiuto al basamento.
- 1486 – Si conclude la costruzione delle navate minori
- 1486/98 – Bramante è responsabile del progetto e della costruzione di una cappella di fondazione ducale dedicata a San Teodoro nel transetto destro.
- 1494 – Progetto pittorico unitario del Borgognone, che interviene in più occasioni nelle parti decorative e nelle figure di santi per le nicchie del transetto.
- 1499 – Bartolomeo Suardi, detto il Bramantino, autore dei medaglioni dipinti sui pennacchi della cupola, succede al Bramante, partito per Roma nel 1499, nella guida del cantiere.
- 1514 – Giovanni da Oggiono apre le due porte nel transetto, regalando alla chiesa un'uscita sulla Via Falcone.
- 1551 – Realizzazione della nuova pavimentazione in marmo
- 1611 – La relazione della visita pastorale del cardinale Federico Borromeo scrive che la chiesa ha 44 finestre in parte rotonde e in parte rettangolari.

- 1678 – *The School of the Blessed Sacrament purchases the house adjoining the parish house and rebuilds it.*
- 1693 – *Renovation of the presbytery area with the construction of a new altar, a frame with angels and scrolls around the image of the Virgin, and a new marble balustrade, probable restoration of the perspective background and walls of the transept.*
- 1818 – *Restoration of the lower area of the perspective and intervention to the decorations of the dome and bell tower.*
- 1819 – *Work begins on plaster decoration and gilding of the perspective remaking of the central lunette.*
- 1820 – *Felice Pizzagalli designs the new high altar that includes the miraculous image of the Virgin.*
- 1856 – *Vandoni transforms Sacristy into Baptistery.*
- 1871 – *Vandoni creates a new facade on Via Torino in grey Ascona stone, adding the two side doors; the shape of the entrance portal, rose window, and basement remain from the original facade.*
- 1913\37 – *Gino Chierici projected to consolidate the prospect wall, shore up the wall, dismantle the cornice and the gable, to build two reinforced concrete beams supported by pillars visible from the outside to support the cornice and gable elements; the proposal is abandoned.*
- 1917 – *The Ministry approves a cost estimate for the external restoration of San Satiro.*
- 1937 – *Consolidation work on the abse's wall by harnessing the bas-relief with a wooden structure to isolate it from the wall; with submuration works on Via del Falcone, a reinforcing masonry is built behind the perspective, shifting the original exterior wall by about twenty centimetres'.*
- 1938\40 – *Chierici finished the works on the upper part of the walls; beginning of restorations to the plaster of the lower part where early medieval wall paintings are found.*
- 1963\65 – *Luigi Figini and Gino Pollini design a new building on via del Falcone.*
- 1973\79 – *Renovation of exterior plasterwork.*

- 1634 – Lavori all'esterno della sacrestia dove il terreno è paludoso.
- 1654 – Consacrazione della cappella di Sant'Antonio da Padova.
- 1678 – La Scuola del SS. Sacramento acquista la casa attigua a quella parrocchiale e la ricostruisce.
- 1693 – Rinnovo della zona presbiteriale con la costruzione di un nuovo altare, di una cornice ad angeli e cartocci intorno all'immagine della Vergine e di una nuova balaustra in marmo, probabile restauro dello sfondo prospettico e delle pareti del transetto.
- 1818 – Risanamento della zona inferiore della prospettiva e intervento alle decorazioni della cupola e della torre campanaria.
- 1819 – Inizio lavori di decorazione degli intonaci e di doratura della prospettiva; rifacimento del lunettone centrale.
- 1820 – Felice Pizzagalli disegna il nuovo altare maggiore che include l'immagine miracolosa della Vergine.
- 1856 – Vandoni trasforma la Sacrestia in Battistero.
- 1871 – Vandoni realizza una nuova facciata su via Torino in pietra grigia di Ascona, aggiungendo le due porte laterali; della facciata originale restano la forma del portale d'ingresso, il rosone e il basamento.
- 1913\37 – Progetto di consolidamento della parete della prospettiva, diretto da Gino Chierici; si studia di puntellare la parete, smontare il cornicione e il timpano per realizzare due travi in cemento armato sostenute da pilastri visibili all'esterno così da sostenere gli elementi del cornicione e del timpano, ma la proposta viene abbandonata.
- 1917 – Il Ministero approva un preventivo di spesa per il restauro esterno di San Satiro.
- 1937 – Consolidamento della parete della prospettiva imbrigliando il bassorilievo con una struttura in legno in modo da isolarlo dalla parete; con opere di sottomurazione su via del Falcone, si realizza una muratura di rinforzo alle spalle della prospettiva, traslando di una ventina di centimetri la parete esterna originale.
- 1938\40 – Completamento dei lavori di restauro condotti da Chierici sulla parte alta delle pareti; inizio dei restauri all'intonaco della parte inferiore dove vengono ritrovate pitture murali altomedievali.

- 1985\86 – *Perspective cleaning and pictorial restoration of the nineteenth-century decorations.*
- 1989\90 – *Restoration of the interior frescoes and the Compianto sculpture group.*
- 1999 – *Restoration campaign entrusted to Lino Capriolo, Pietro and Giorgio Ripa with the remaking of the roofing and plastering of the exterior facades.*

This paragraph has been revised from the chronology written by Gioia Grecchi for her Master's Thesis in Interior Design: Il gioco illusorio della spazio dalla prospettiva del finto coro di santa Maria presso San Satiro alle magie ottiche delle espressioni contemporanee.

Tutor Prof.ssa Michela Rossi, Politecnico di Milano, 2014/15.

- 1963\65 – Figini L. e Pollini G. progettano un nuovo edificio su via del Falcone.
- 1973\79 – Rifacimento degli intonaci esterni.
- 1985\86 – Pulitura della prospettiva e restauro pittorico delle decorazioni ottocentesche.
- 1989\90 – Restauro degli affreschi interni e del gruppo scultoreo del Compianto.
- 1999 – Campagna di restauro affidata a Lino Capriolo, Pietro e Giorgio Ripa con il rifacimento delle coperture e degli intonaci dei fronti esterni.

Rielaborazione dalla cronologia redatta da Gioia Grecchi per la Tesi di Laurea Magistrale in Interior Design *Il gioco illusorio della spaziò: dalla prospettiva del finto coro di santa Maria presso San Satiro alle magie ottiche delle espressioni contemporanee.*

Relatore Prof.ssa Michela Rossi, Politecnico di Milano, a.a. 2014/15.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAPHY

Prospettiva e prospettiva architettonica

Perspective and architectural perspective

- Baglioni Leonardo, Fasolo Marco, Migliari Riccardo. *Sulla interpretazione delle prospettive architettoniche*. In: Le ragioni del disegno. Pensiero, forma e modello nella gestione della complessità, Roma: Gangemi Editore, 2016, pp. 1027-1032.
- Baglioni Leonardo, Salvatore Marta. *Principi proiettivi alla base della prospettiva solida nella scenografia di Guidobaldo dal Monte*. In ed. A.A. V.V. Territori e frontiere della rappresentazione, Roma: Gangemi. 2017, pag. 267-276.
- Bartoli Maria Teresa, *Le ragioni geometriche del segno architettonico*, Materia e geometria 4/97, Università degli studi di Firenze – Dipartimento di progettazione dell'Architettura. Firenze. Alinea Editrice, 1997.
- Camerota Filippo, a cura di, *Nel segno di Masaccio. L'invenzione della prospettiva*, Firenze. Giunti, 2001.
- Camerota Filippo, *Architettura e prospettiva tra inediti e rari*. Firenze. Alinea, ed. 1987.
- Candito Cristina. *L'indipendenza dello spazio illusorio*. Disegnare Idee Immagini, vol. 58, (2019), p. 70-79.
- Casale Andrea. *Forme della percezione. Dal pensiero all'immagine*, Roma – Milano. Franco Angeli, 2018.
- Cocchiarella Luigi. *Orthographic Anamnesis on Piero della Francesca's Perspectival Treatise*. In Nexus 20/21 Architecture and Mathematics Conference Book, 7-12. Turin: Kim Williams Books, (2021).
- Dal Monte Guidobaldo, *Perspectivae libri sex*. Pesaro. Girolamo Concordia, 1600.
- Filippi Elena, *L'arte della prospettiva: l'opera e l'insegnamento di Andrea Pozzo e Ferdinando Galli Bibiena in Piemonte*. Firenze. L. S. Olschki, 2002.
- Graziano M. Valenti, a cura di *Prospettive architettoniche - conservazione digitale, divulgazione e studio. Voll. I - II*. Roma: Sapienza Università Editrice, 2017.

- Kubovy Michael. *La freccia nell'occhio, Psicologia della prospettiva e arte rinascimentale*. Padova. Franco Muzzio Editore, 1992.
- Michela Rossi, guest editor. *Perspective, Architecture and mathematics*. Nexus Network Journal. Vol 18 - 3. Basel: Springer-Birkhauser, 2016.
- Migliari Riccardo et al., *Piero della Francesca De prospectiva pingendi*. Roma: Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, 2016.
- Migliari Riccardo; Baglioni, Leonardo; Fallavollita, Federico; Fasolo, Marco; Mancini, Matteo Flavio; Romor, Jessica; Salvatore, Marta. *De prospectiva pingendi. Tomo I - II [Disegni]*. Roma: Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, 2016.
- Monteleone Cosimo. *La prospettiva di Daniele Barbaro. Note critiche e trascrizione del manoscritto* It. IV, 36=5446. Roma: Aracne, 2020.
- Nicco Fasola G, Piero della Francesca. *De Prospectiva Pingendi, 75*. Edizione critica. Firenze. Le Lettere, ed. 1984.
- Panofsky Erwin. *La prospettiva "come forma simbolica" e altri scritti*, a cura di Guido Neri con una nota di Marisa Dalai, Milano. Giangiacomo Feltrinelli Editore, 2001.
- Rossi Michela, *Architectural Perspective between Image and Building*. Nexus Network Journal. Vol. 18/3, Basel: Birkhäuser, (2016).
- Sabbatini Nicola, *Pratica di fabbricar macchine e scene né teatri*. Ravenna. Pietro de Paoli e Gio Battista Giovannelli, 1638.
- Salvatore Marta. *La rappresentazione in 'propria forma' nel De Prospectiva Pingendi di Piero della Francesca*. In: *Le ragioni del disegno. Pensiero, forma e modello nella gestione della complessità / The reasons of drawing. Thought, shape and model in the complexity management.*, Roma: Gangemi Editore International, p. 1269-1274.
- Sinisgalli Rocco, *La prospettiva di Federico Commandino. Contiene: Federici Commandini Urbinatis In planisphaerium Ptolemai commentarius*. - Trad. italiana a fronte. Firenze. Cadmo, ed. 1993.
- Sinisgalli Rocco, *La prospettiva: fondamenti teorici ed esperienze figurative dall'antichità al mondo moderno*. Atti del Convegno internazionale di studi, Istituto svizzero di Roma (Roma, 11-14 settembre 1995. Firenze), Cadmo, 1995.
- Sinisgalli Rocco, *Una storia della scena prospettica dal Rinascimento al barocco: Borromini a quattro dimensioni*, Cadmo. Firenze, 1998.

- Sinisgalli Rocco, *Verso una storia organica della prospettiva*. Roma. Edizioni Kappa, 2001.

Bramante

- Borsi Franco, *Bramante*, Milano, Electa, 1989.
- Bruschi Arnaldo, *Bramante*. Roma-Bari. Editori Laterza, 1987.
- Frommel Christoph L., Giordano Luisa, Shofield Richard, *Centro internazionale di studi di architettura Andrea Palladio, Bramante milanese*, Atti del convegno *L'architettura del Rinascimento lombardo*. Milano. Marsilio, 2002.
- Marrucci Rosa Auletta, *Bramante in Lombardia: restauri 1974-2000*. Milano. Skira, 2001.
- Patetta Luciano, *Bramante architetto e pittore (1444-1514)*. Palermo. Edizioni Caracol, 2009.
- Patetta Luciano, *Bramante e la sua cerchia a Milano e in Lombardia 1480-1500*. Milano. Skira, 2001.
- Romanini Angiola Maria, *Il 'Quattrocento padano' e il Bramante. Studi Bramanteschi*. Atti del Congresso internazionale di studi bramanteschi, Milano-Urbino-Roma De Luca 1974. Pag. 49-69, 1970.
- Rossi Michela, Russo Michele, *L'eredità di Bramante tra spazio virtuale e protodesign*. Milano-Roma. Franco Angeli open access, 2021.
- Wolfgang Jung, *Coerenti incongruenze sulla incisione Prevedari e il coro di Santa Maria presso San Satiro di Bramante*, in *Quaderni dell'Istituto di Storia dell'Architettura*, 31, 1998, pp. 27-40.

Santa Maria presso San Satiro

- Bistoletti Bandera Sandrina *Il Sacello di San Satiro: storia, ritrovamenti, restauri*, Cinisello Balsamo, Editore Amilcare Pizzi, 1990.
- Buratti Giorgio, Mele Giampiero, Rossi Michela, *The Masterly Perspective and Design of Bramante's "Mirabile Artificio" in Milan*. Nexus Network Journal, vol. 24/2022. Cham: Springer Nature, 2022. p. 545-565.
- Lise Giorgio, *Santa Maria presso San Satiro*. Milano, Silvana Editoriale d'Arte, 1975.
- Maria Teresa Fiorio, a cura di, *Le chiese di Milano*, Electa, Milano, 1985
- Marucci Rosa Auletta, *La "prospettiva" bramantesca di Santa Maria presso San Satiro: storia, restauri e intervento conservativo*. Banca Agricola Milanese, Milano, 1987.

- Mazzotta Buratti Adele, *Insula Ansperti. Il complesso monumentale di S. Satiro*, Milano, Silvana Editoriale, ed. 1992.
- Mele G. *Santa Maria delle Grazie*, in Rossi M., Duvernoy S., Mele G., ed. *Milano. Maths in the city: a mathematical tour of Milan architecture*. Santarcangelo di Romagna. Maggioli Editore, 2012 pagg. 78-85.
- Robbiani Eros, *La verifica costruttiva del finto coro di Santa Maria presso San Satiro a Milano*. Marisa Dalai Emiliani ed. *La prospettiva rinascimentale: codificazioni e trasgressioni*, Vol I, 215-231. Firenze: Centro Di, 1980.
- Rossi Michela, Buratti Giorgio, Mele Giampiero, *Perspective Trials in the Manipulation of Space. The Bramante's Fake Choir of Santa Maria presso San Satiro in Milan*. DISEGNO, vol. 4/2019, 2019, p. 41-52.
- Scholfield Richard, Sironi Grazioso, *Bramante and the problem of Santa Maria presso San Satiro*, *Annali di Architettura*, vol 12/2000. (2000), Pag 17-57.

Riferimenti teorici

Theoretical references

- Martini A., *Manuale di metrologia ossia misure, pesi e monete in uso attualmente e anticamente presso tutti i popoli*. Torino: Loescher, 1883. Digital edition, Mura G. ed. 2003. Milano. Biblioteca Nazionale Braidense.
- Migliari Riccardo, *Il disegno degli ordini e il rilievo dell'architettura classica: cinque pezzi facili*, in *Disegnare, Idee Immagini*. Vol. 2/1991, 1991, Roma: Gangemi.
- Scholfield P.H., *The Theory of Proportion in Architecture*, Cambridge: Cambridge University Press, 1958.
- Vagnetti Luigi. *Concinnitas; riflessioni sul significato di un termine albertiano*. In *Studi e Documenti Di Architettura*, n. 2/1973. Firenze. Teorema edizioni, pag. 141.
- Wittkover R., 1949. *Architectural Principles in the Age of Humanism*. Trad. it. Pedio, R. *Principi architettonici nell'Età dell'Umanesimo*. Collana Biblioteca di storia dell'arte n.2, Torino: Einaudi, 1964.



BIBLION
edizioni