Book of Abstracts

WORKSHOP 2025 DIGIMATH

Il ruolo delle tecnologie digitali a supporto della didattica della matematica: esperienze di buone pratiche a livello universitario

Milano, 15 - 16 Luglio 2025

Laboratorio di Formazione e Sperimentazione Didattica - FDS
Dipartimento di Matematica - Politecnico di Milano

effediesse = f(s)
Laboratorio di Formazione e Sperimentazione Didattica

DIGIMATH

Editors

Caterina Bassi[1], Domenico Brunetto[1], Monica Conti[1], Michele G. Fiorentino[2], Annamaria Miranda[3]

[1]Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
[2]Dipartimento di Scienze della Formazione Primaria, Psicologia e Comunicazione, Università degli Studi di Bari "Aldo Moro"
[3]Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
Milano, 15–16 Luglio 2025

ISBN: 978-88-6493-1265

Indice

Comitato scientifico

Domenico Brunetto, Politecnico di Milano
Monica Conti, Politecnico di Milano
Michele G. Fiorentino, Università degli Studi di Bari
Annamaria Miranda, Università degli Studi di Salerno

Comitato Organizzatore Locale

Caterina Bassi, Politecnico di Milano
Domenico Brunetto, Politecnico di Milano
Monica Conti, Politecnico di Milano
Helena Dell'Anna, Politecnico di Milano

Prefazione

La trasformazione digitale dell'insegnamento universitario della matematica rappresenta una delle sfide più rilevanti per la didattica contemporanea. Il Workshop 2025 DIGiMATH — "Il ruolo delle tecnologie digitali a supporto della didattica della matematica: esperienze di buone pratiche a livello universitario" — si è tenuto presso il Politecnico di Milano il 15 e 16 luglio 2025, ospitato dal Laboratorio EffeDiEsse del Dipartimento di Matematica. L'iniziativa, promossa dal gruppo UMI-DIGiMATH (www.digimath.it), rappresenta la seconda edizione di un appuntamento che si consolida come punto di riferimento nazionale per la diffusione della cultura digitale e per l'innovazione nei processi di insegnamento e di apprendimento della matematica a livello universitario.

L'obiettivo principale del workshop è stato quello di confrontare e discutere esperienze, ricerche e pratiche sull'uso delle tecnologie digitali nella didattica della matematica, e di promuovere collaborazioni tra ricercatori e docenti universitari interessati a innovare la didattica nei corsi di matematica. Le due giornate di lavoro hanno offerto uno spazio di dialogo aperto e costruttivo con ampio margine per la discussione e la condivisione di idee, riflessioni e prospettive future.

I contributi raccolti nel presente *Book of Abstracts* testimoniano la ricchezza e la varietà delle esperienze presentate durante le sei sessioni tematiche. Il workshop ha saputo integrare dimensioni complementari della ricerca, che hanno spaziato da studi teorici sull'integrazione delle tecnologie digitali alle sperimentazioni concrete condotte nei corsi universitari e nella formazione degli insegnanti, creando un dialogo fertile tra riflessione pedagogica e pratica didattica. Tra le questioni di grande attualità affrontate spiccano: l'uso dell'Intelligenza Artificiale sulla didattica della matematica e le potenzialità del feedback formativo automatizzato, lo sviluppo di ambienti di apprendimento blended e collaborativi, l'adozione di MOOC, serious games e strumenti interattivi per favorire la personalizzazione e l'adattività dell'apprendimento. Un tema trasversale emerso con forza è il ruolo delle tecnologie come mediatori di processi cognitivi e professionali, capaci, non solo di supportare l'apprendimento degli studenti, ma anche di favorire la costruzione dell'identità docente e la riflessione sulle pratiche educative.

La seconda edizione del workshop si inserisce nel percorso di crescita della comunità DIGiMATH, che si propone di collegare ricerca e innovazione didattica, promuovendo un approccio collaborativo e interdisciplinare. La sessione conclusiva, dedicata alla programmazione delle future attività del gruppo, ha confermato la vitalità di questa rete di ricerca e la volontà di continuare a costruire, insieme, una visione condivisa e scientificamente fondata di didattica della matematica nell'era digitale. Ha delineato prospettive che vanno dal rafforzamento della rete di collaborazione tra atenei italiani all'apertura verso il contesto internazionale, dalla sistematizzazione delle buone pratiche alla promozione di progetti di ricerca condivisi.

Desideriamo ringraziare tutti gli autori e le autrici per i loro contributi, i moderatori e il Comitato scientifico e organizzatore per il loro prezioso impegno nella realizzazione dell'evento, e tutti i partecipanti per la qualità delle discussioni e la partecipazione attiva.

Ci auguriamo che questo volume possa costituire non solo la documentazione di un momento di incontro e riflessione, ma anche uno stimolo per nuove ricerche e collaborazioni, contribuendo alla diffusione di pratiche didattiche innovative e consapevoli nell'insegnamento della matematica.

Milano, Luglio 2025
Gli Editor

Verso un'identità TPACK: pattern di partecipazione di studenti universitari di matematica in un' attività di genesi documentale

Luca Picariello[1], Loredana Saliceto[1], Annamaria Miranda[1], Cristina Coppola[1]
[1] Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno
lpicariello@unisa.it

Nel contesto della didattica universitaria della Matematica pura, l'integrazione di strumenti digitali risulta ancora marginale, quando non del tutto assente. Tuttavia, alcuni contenuti di matematica avanzata si prestano in modo particolare a rappresentazioni interattive e dinamiche che favoriscono una più profonda comprensione concettuale e rendono possibile una sistematica integrazione della tecnologia nel processo di insegnamento/apprendimento (Albano et al., 2024; Arruabarrena et al., 2021; Miranda, 2024) e la formazione dell'identità (Miranda et al., 2024). Il processo di genesi documentale (Gueudet & Trouche, 2009) favorisce l'emergere dei primi segni dello sviluppo della conoscenza TPACK (Mishra & Koehler, 2006) contribuendo, al contempo, a rendere percepibile la transizione dal ruolo di studente a quello di futuro insegnante (Miranda & Saliceto, 2024).

Nel presente studio adottiamo il framework TPACK in una prospettiva nella quale le componenti pedagogica, disciplinare e in particolar modo tecnologica, non sono solo saperi da integrare ma elementi costitutivi per la formazione dell'identità professionale del docente di matematica.

Il costrutto dell'identità è diventato nel tempo uno strumento utile per lo studio delle pratiche d'aula degli insegnanti in un'ottica partecipativa, in quanto membri di una comunità di pratica (Wenger, 1998). In questo lavoro consideriamo l'identità come un sistema dinamico e situato, attraverso cui gli individui definiscono sé stessi e gli altri all'interno di uno specifico contesto sociale. Adottiamo la prospettiva dei *pattern of participation* (PoP) (Skott, 2013; Skott & Psycharis, 2024) che caratterizza l'identità a partire dall'individuazione di marcatori identitari riscontrabili nel modo in cui gli individui si posizionano rispetto alle proprie pratiche didattiche.

In quest'ottica ci poniamo la seguente domanda di ricerca:

> RQ) Quali marcatori di identità emergono dal posizionamento degli studenti come futuri docenti rispetto alle componenti del framework TPACK?

Nel presente studio consideriamo gli studenti partecipanti come docenti in formazione. Pur trattandosi di studenti iscritti a un corso di laurea triennale, il contesto formativo in cui operiamo mostra che una larga maggioranza di essi (circa il 70%) prosegue nella laurea magistrale con orientamento didattico, frequentando corsi specificamente pensati per la formazione all'insegnamento.

L'indagine sulla loro identità professionale trova quindi fondamento nella traiettoria formativa statisticamente più frequente, che li vede avviarsi verso la professione docente.

Come sottolineato da Wasserman, Buchbinder e Buchholtz (2023), rendere significativa la matematica universitaria per la formazione degli insegnanti richiede di riconoscere che la costruzione dell'identità professionale inizia ben prima dell'ingresso nella professione stessa, e può essere alimentata da pratiche didattiche universitarie che esplicitamente mettono in gioco il ruolo del futuro docente.

L'attività sulla quale si basa il nostro studio, realizzata all'interno di un corso di Topologia nell'a.a. 2023-24, ha previsto la progettazione di gruppo di una risorsa didattica su argomenti collegati ai temi del corso, da presentare e discutere con i propri pari.

Agli studenti è stato poi chiesto di rispondere a un questionario finalizzato a raccogliere percezioni individuali sull'esperienza svolta. Di seguito, riportiamo le analisi di due risposte, scelte tra quelle più significative.

In ottica PoP, dalla prima risposta sembrano emergere i seguenti marcatori identitari. In primo luogo, un atteggiamento rispetto alla progettazione didattica che vede il percorso suddiviso in teoria e pratica:

> La formula che ho proposto segue una struttura didattica in due fasi:
> Fase 1: Presentazione Teorica
> Fase 2: Somministrazione di un Problema

Nell'estratto successivo emerge la consapevolezza dell'uso di strumenti visuali e dinamici come mediatori tra studente e concetto matematico:

> strumenti come GeoGebra sono estremamente utili per visualizzare concetti complessi di Topologia algebrica

Infine, emerge la visione del digitale come strumento per attivare il coinvolgimento degli studenti, condizione necessaria per l'apprendimento:

> ...utilizzare software interattivi coinvolge maggiormente gli studenti

In relazione a questi tre marcatori è possibile delineare l'identità docente iniziale, che, per la presenza prevalente e ben integrata delle componenti P e T, si configura come quella di un progettista didattico consapevole, che promuoverebbe, attraverso l'utilizzo dello strumento digitale, il coinvolgimento attivo dello studente facilitando la comprensione di complessi concetti matematici.

L'analisi della seconda risposta mette in luce alcuni marcatori che, pur richiamando elementi presenti nel caso precedente, evidenziano sfumature differenti.

Anche in questo caso emerge una visione dell'organizzazione didattica articolata in teoria e pratica come sembra emergere dal seguente estratto:

> [L'approccio che ho scelto] aiuta gli studenti a vedere come i concetti teorici si traducono nella pratica, migliorando così la loro comprensione e capacità di risolvere problemi matematici complessi

Tuttavia, si riscontra un'accentuazione della dimensione teorica, che sembra essere intesa come il fondamento principale per la trasmissione del sapere.

> Ho scelto di presentare teoricamente concetti complessi di Topologia Algebrica. Ho fatto questa scelta perché è importante fornire una base solida di conoscenza prima di affrontare problemi pratici.

Questa affermazione sembra evidenziare una visione dell'insegnamento in cui i concetti complessi vengono introdotti prioritariamente a livello teorico, con la convinzione che solo una solida base concettuale possa rendere significativa l'attività pratica (C).

Questa analisi, quindi, restituisce l'immagine di un'identità docente che si fonda su una visione tradizionale della trasmissione del sapere, centrata sulla teoria e sulla progettazione didattica. Infatti, a fronte di una componente pedagogica (P) prevalente e una componente tecnologica (T) debolmente integrata, quest'ultima appare assente o marginale, suggerendo una visione dell'insegnamento che non prevede un'integrazione significativa degli strumenti digitali.

In conclusione, coinvolgere gli studenti universitari nella progettazione, produzione e presentazione di una risorsa digitale, valorizzandone le competenze digitali e l'attenzione agli aspetti pedagogici, contribuisce a far emergere diversi patterns di identità docente.

Bibliografia

- Albano, G., Antonini, S., & Miranda, A. (2024). Digital Experiences of Mathematical Cognitive Functions in Learning the Basic Concepts of General Topology. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *10*, 823–849. https://doi.org/10.1007/s40753-024-00245-3
- Arruabarrena, R., Sánchez, A., Domínguez, C., & Jaime, A. (2021). A novel taxonomy of student-generated video styles. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*. *18*, (68). https://doi.org/10.1186/s41239-021-00295-6
- Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers?. *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 199–218. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9159-8
- Miranda, A. (2024). Promoting meaningful learning in topology supported by undergraduate students' video creations. In G. Casalino, R. Di Fuccio, G. Fulantelli, P. Raviolo, P. C. Rivoltella, D. Taibi, & G. A. Toto (Eds.), *Communications in Computer and Information Science (CCIS)* (pp. 227-249). Springer.
- Miranda, A., Picariello, L., & Saliceto, L. (2024). Beginning to shape mathematics students' teacher identity through activities based on digital and geometric transitions. In H.-G. Weigand, A. Clark-Wilson, E. Faggiano, & M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 17th ERME Topic Conference (ETC 17) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA 4)* (pp. 123-134). University of Bari "Aldo Moro".
- Miranda, A., & Saliceto, L. (2024) Promoting undergraduate mathematics students' TPACK knowledge through digital resource productions. In *BOA HELMeTO 2024 Book of abstracts 6th International Conference on Higher Education Learning Methodologies and Technologies Online*. (pp. 229-231). Studium.
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record*, *108*(6), 1017-1054.
- Skott, J. (2013). Understanding the role of the teacher in emerging classroom practices: Searching for patterns of participation. *ZDM*, *45*, 547-559.
- Skott, C., & Psycharis, G. (2024). Studying how a mathematics teacher's professional identity shapes and is shaped by the use of digital resources in the classroom. *NOMAD Nordic Studies in Mathematics Education*, *29*(3-4), 61–82. https://doi.org/10.7146/nomad.v29i3-4.150753
- Wasserman, N. H., Buchbinder, O., & Buchholtz, N. (2023). Making university mathematics matter for secondary teacher preparation. *ZDM*, *55*(4), 719–736. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01484-5
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Percorsi di apprendimento personalizzati e adattivi: una riflessione teorica su CHUNK Learning

Helena Dell'Anna[1], Domenico Brunetto[1]
[1] Politecnico di Milano
helena.dellanna@polimi.it

Nei contesti educativi tradizionali, i docenti tendono a standardizzare sia i contenuti che le modalità di coinvolgimento, proponendo lo stesso materiale a tutti gli studenti nello stesso momento. Questo approccio, comune soprattutto nel contesto universitario, rischia spesso di limitare l'esperienza di apprendimento individuale (Biggs et al., 2022). Tali criticità si accentuano nella fase di transizione tra scuola e università, caratterizzata da *discontinuità cognitive, sociali e istituzionali* (Di Martino et al., 2023) che rendono complessa la gestione dei diversi percorsi di formazione degli studenti.

Per rispondere a questa sfida, la piattaforma "CHUNK Learning" (www.chunklearning.net ; Gera et al., 2019), i cui contenuti sono organizzati in una *rete modulare multilivello*, composta da CHUNK (unità tematiche) e CHUNKlet (micro-unità), collegate secondo criteri disciplinari, cognitivi, metodologici e motivazionali, rompe la linearità classica dei corsi, favorendo una visione reticolare e connessa dei concetti. Il CHUNK Learning, può essere visto come un artefatto *artefatto* (Vérillon & Rabardel, 1995) digitale all'interno del modello teorico del *tetraedro e-learning* (Albano et al., 2013), che estende il triangolo didattico classico (Chevallard, 1985), composto da studente (S), insegnante (T) e conoscenza matematica (M), aggiungendo un quarto vertice: l'autore (A), responsabile della progettazione e orchestrazione del percorso. Quindi, la tecnologia è rappresentata da due sfere, una inscritta nel tetraedro, che include le tecnologie integrate esplicitamente a fini didattici, e una sfera esterna, che rappresenta l'ambiente tecnologico e sociale in cui siamo immersi, comunque influente nei processi di apprendimento. In questa cornice, CHUNK Learning viene interpretato come uno strumento tecnologico progettato a scopo didattico, che media le interazioni all'interno del tetraedro, rappresentato dalla sfera interna. In particolare, le quattro facce del modello permettono di interpretare tre aspetti fondamentali della piattaforma. La *modularità* si riconosce nella faccia A–T–M, in cui l'autore, in collaborazione con l'insegnante, seleziona e caratterizza contenuti e strumenti, creando una rete multilivello di conoscenze strutturata attraverso attributi comuni e prerequisiti didattici. La *personalizzazione* emerge nella faccia A–S–M, dove lo studente compila il proprio profilo iniziale e interagisce con contenuti selezionati in base alla similarità, seguendo percorsi di apprendimento coerenti con le proprie competenze, interessi e metodologie di apprendimento preferite. Infine, la *adattività* è descritta dalla faccia A–S–T, in cui il feedback fornito dallo studente modifica dinamicamente il profilo utente, influenzando la similarità con i contenuti e i percorsi raccomandati. Questo processo iterativo consente alla piattaforma di adattarsi progressivamente all'evoluzione dello studente.

Uno degli obiettivi centrali di piattaforme come CHUNK Learning è offrire esperienze formative coinvolgenti, che possono essere interpretate e analizzate attraverso il quadro teorico del *Flow* (Csíkszentmihályi, 1990). Il Flow è inteso come uno stato psicologico di coinvolgimento ottimale che si verifica quando la sfida del *task* è ben bilanciata rispetto all'abilità dello studente, evitando condizioni di frustrazione o noia.

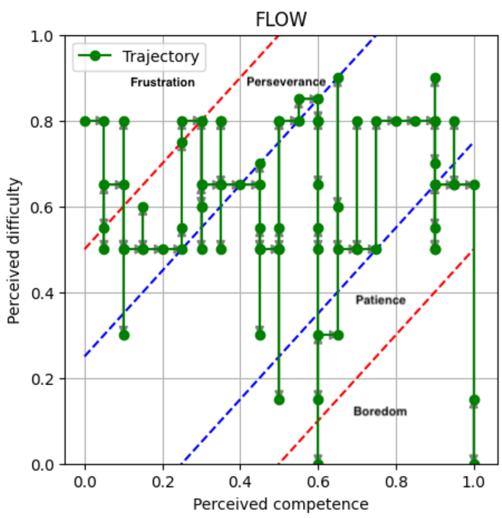
Il presente contributo si interroga su come il Flow possa essere utilizzato per valutare e migliorare le esperienze di apprendimento in ambienti digitali personalizzati come il CHUNK Learning. In particolare si vuole affrontare la seguente domanda di ricerca:

> RQ) Come può il quadro del Flow essere utilizzato per supportare esperienze di apprendimento ottimali in ambienti digitali come il CHUNK Learning?

Il Flow è stato ampiamente utilizzato in didattica della matematica per analizzare le esperienze ottimali degli studenti durante la risoluzione di problemi e di uno specifico compito. Tuttavia, nelle piattaforme di *Learning and Development Systems* (LDS) come CHUNK Learning, gli studenti interagiscono con diversi tipi di materiali come spiegazioni, esempi, esercizi guidati, che non sempre implicano l'esecuzione attiva di un compito. In questo scenario, risulta necessario ripensare le dimensioni fondamentali del Flow.

A tal fine, abbiamo costruito una versione adattata del flow (Flow 2.0), in cui la dimensione dell'abilità è intesa come *competenza percepita* (Pajares & Miller, 1994), cioè come il livello di competenza che lo studente attribuisce a sé stesso rispetto ai contenuti proposti. Questa dimensione viene inizialmente determinata sulla base dell'autovalutazione dello studente rispetto ai contenuti trattati da ciascun materiale didattico, e viene successivamente aggiornata in modo dinamico lungo il percorso di apprendimento. In particolare, la competenza percepita aumenta quando lo studente affronta materiali la cui difficoltà percepita è coerente o lievemente superiore alla propria competenza, mentre rimane invariata negli altri casi. Parallelamente, la dimensione della sfida viene intesa come *difficoltà percepita*, ovvero il livello di disequilibrio cognitivo (Piaget, 1964) percepito dallo studente durante l'interazione con un contenuto. In mancanza di misure dirette, la difficoltà percepita viene stimata per ciascun materiale come la media dei disallineamenti tra profilo dello studente e caratteristiche del contenuto. A partire da queste nuove dimensioni, abbiamo tracciato la traiettoria degli studenti nel piano del Flow 2.0, confrontando il percorso originale suggerito dal sistema con uno riadattato secondo il modello del Flow 2.0.

La Figura 1 mostra un esempio delle due traiettorie relative al percorso di uno specifico studente. Come si può osservare, nel percorso originale lo studente tende a uscire frequentemente dal Flow, sperimentando stati di frustrazione o noia. Nel percorso riadattato, invece, la sequenza suggerita può mantenere lo studente il più possibile all'interno della regione centrale del Flow, favorendo un'esperienza più motivante, continua e coerente con il suo sviluppo.



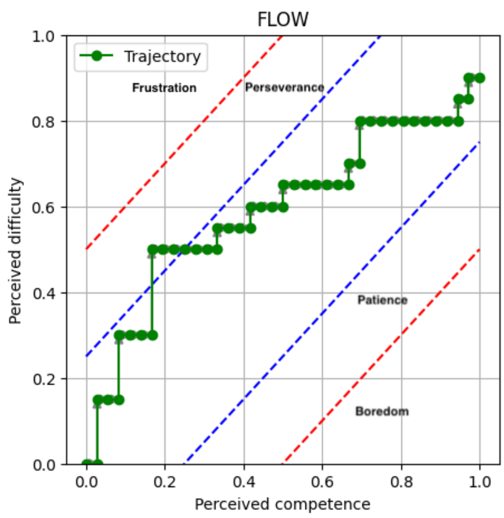


Figura 1: Confronto tra percorso originale (a sinistra) e riadattato (a destra) sul piano del Flow 2.0. Ogni punto rappresenta un materiale didattico suggerito, posizionato in base alla competenza percepita (asse x) e alla difficoltà percepita (asse y).

In maniera analoga, negli altri profili analizzati emergono traiettorie simili, suggerendo la possibilità concreta di migliorare il sistema di "raccomandazione" e rendere l'esperienza più coinvolgente per gli studenti.

I prossimi passi della ricerca riguarderanno la ridefinizione del profilo utente, al fine di raccogliere i dati necessari a misurare più coerentemente le dimensioni di competenza e difficoltà percepita, e lo sviluppo di strumenti di feedback più efficaci per tracciare l'evoluzione di queste due dimensioni in modo più preciso.

Bibliografia

- Albano, G., Faggiano, E., & Mammana, M. F. (2013). A tetrahedron to model e-learning Mathematics. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, *23*(Supplemento 1), 429-436.
- Biggs, J., Tang, C., & Kennedy, G. (2022). *Teaching for quality learning at university* (5th ed.). McGraw-Hill Education.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Csikszentmihalyi, M. (1990). *Flow: The psychology of optimal experience.* Harper & Row New York
- Di Martino, P., Gregorio, F., & Iannone, P. (2023). The transition from school to university in mathematics education research: new trends and ideas from a systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics*, *113*(1), 7–34. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10194-w
- Gera, R., BartoIf, D. M., Isenhour, M. L., & Tick, S. (2019). Chunk: Curated heuristic using a network of knowledge.
- Pajares, F., & Miller, M. D. (1994). Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: A path analysis. *Journal of Educational Psychology*, *86*(2), 193–203. https://doi.org/10.1037/0022-0663.86.2.193
- Piaget, J. (1964). Cognitive development in children: Piaget: development and learning. *Journal of Research in Science Teaching*, *2*, 176–186. https://doi.org/10.1002/tea.3660020306
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, *10*(77), 77-101.

Serious game per supportare l'apprendimento della Matematica a livello universitario

Alice Barana[1], Cecilia Fissore[1], Valeria Fradiante[1], Marina Marchisio Conte[1], Matteo Sacchet[1]
[1] Dipartimento di Biotecnologie Molecolari e Scienze per la Salute, Università di Torino, Italia
valeria.fradiante@unito.it

Il game-based learning (GBL) è un approccio didattico basato sull'utilizzo di giochi per facilitare il processo di apprendimento (Plass et al., 2015; Perrotta et al., 2013; Fissore et al., 2023). Quando tali giochi sono digitali ci si riferisce nello specifico al digital game-based learning (DGBL) (Prensky, 2001). I serious game rappresentano una categoria di giochi progettati non solo per l'intrattenimento, ma con l'obiettivo specifico di apprendere e sviluppare competenze specifiche all'interno di scenari reali o immaginari, coinvolgendo gli utenti in esperienze interattive che stimolano sia l'acquisizione di conoscenze sia l'intrattenimento (Becke, 2021; Chatzea et al., 2024; Chen & Michael, 2005).

Alcuni studi hanno evidenziato come il GBL nella formazione universitaria possa contribuire a ridurre l'ansia per la matematica (Piñero et al., 2024) e a favorire una maggiore motivazione verso la disciplina (Zabala-Vargas et al., 2019; Clarke et al., 2016).

Questa ricerca riguarda l'integrazione del DGBL per l'apprendimento della matematica in corsi di studio che prevedono insegnamenti di matematica di base, con particolare riferimento al serious game "L'assassino dell'High-Tech Institute" progettato dal Delta Research Group dell'Università di Torino. L'obiettivo è analizzare l'impatto del serious game in termini di ansia legata alla matematica e di motivazione verso la disciplina. Nell'anno accademico 2023-24, il serious game "L'assassino dell'High-Tech Institute" è stato sperimentato con 156 studenti e studentesse del primo anno di quattro diversi Corsi di Studio dell'Università di Torino, come strumento didattico per facilitare l'apprendimento e per prepararsi all'esame nei Corsi di Laurea in Tecniche di Radiologia Medica, per Immagini e Radioterapia; in Biotecnologie; in Tecniche della Prevenzione nell'Ambiente e nei Luoghi di Lavoro; e nel Corso di Laurea Magistrale in Scienze Strategiche. Il serious game è incentrato su parte degli argomenti trattati in aula e invita studenti e studentesse a mettere in pratica le proprie conoscenze sulle funzioni di una variabile reale. Il gioco è finalizzato a supportare il raggiungimento di obiettivi di apprendimento sia disciplinari sia trasversali, focalizzandosi sulla modellizzazione di situazioni problematiche e sul problem solving. Ai giocatori e alle giocatrici è richiesto di interpretare e rappresentare grafici di funzioni reali e delle loro derivate e riconoscere le loro proprietà.

La trama si apre con l'omicidio di Teresa, una scienziata dell'High-Tech Institute. L'obiettivo del gioco è scoprire l'identità dell'assassino, interpretando una serie di indizi che ricostruiscono il percorso da lui (o lei) compiuto. Il primo indizio rivela che tale percorso corrisponde al grafico di una funzione di una variabile reale. A questo punto entra in scena Kathy, una matematica dell'High-Tech Institute, che, pur non avendo potuto riconoscere il colpevole poiché mascherato, ha osservato attentamente alcuni dettagli del tragitto. Le sue osservazioni si traducono in una serie di indizi, espressi in termini matematici come proprietà che la funzione deve possedere affinché il suo grafico coincida con il percorso seguito dall'assassino. Una volta esaminati tutti gli indizi, il giocatore deve scegliere il colpevole tra i vari sospettati proposti. Il gioco è stato fruito nell'ambiente digitale di apprendimento Moodle based in cui sono stati caricati tutti i materiali didattici, poiché è stato sviluppato con un editor facilmente integrabile con una piattaforma Moodle, facilitando l'adozione del DGBL e superando le barriere legate alle difficoltà nell'adozione di strumenti digitali nelle scuole e nelle università (Huang et al., 2013; Vidakis et al., 2019).

L'impatto del serious game sulla motivazione e sull'ansia verso la matematica è valutato attraverso il confronto delle risposte di studenti e studentesse ad un questionario iniziale e uno finale (Barana et al., in press), compilati rispettivamente prima e dopo aver svolto il serious game. Dai risultati emerge una significativa riduzione dell'ansia legata alla matematica e, in alcuni casi, anche un aumento della motivazione verso la disciplina.

Bibliografia

- Barana, A., Conte, A., Fradiante, V., Marchisio, M., & Rabellino, S. (in press). Serious game for higher mathematics education: Evaluation of the learning tool. In *Proceedings of the 49th IEEE International Conference on Computers, Software, and Applications (COMPSAC 2025).*
- Becke, K. (2021). What's the difference between gamification, serious games, educational games, and game-based learning? *Academia Letters*, *209*. https://doi.org/10.20935/AL209
- Chatzea, V. E., Logothetis, I., Kalogiannakis, M., Rovithis, M., & Vidakis, N. (2024). Digital educational tools for undergraduate nursing education: A review of serious games, gamified applications and non-gamified virtual reality simulations/tools for nursing students. *Information*, *15*(7), 410. https://doi.org/10.3390/info15070410
- Chen, S., & Michael, D. (2005). *Serious games: Games that educate, train and inform.* Muska & Lipman/Premier-Trade.
- Clarke, S., Arnab, S., Keegan, H., Morini, L., & Wood, O. (2016). EscapED: Adapting live-action, interactive games to support higher education teaching and learning practices. In R. Bottino, J. Jeuring, & R. C. Veltkamp (Eds.), *Games and Learning Alliance. GALA 2016. Lecture Notes in Computer Science: Vol. 10056* (pp. 144-153). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-50182-6_13
- Fissore, C., Fradiante, V., Marchisio, M., & Pardini, C. (2023). Design didactic activities using gamification: The perspective of teachers. In M.B. Nunes, P. Isaías, T. Issa, & T. Issa (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference on e-Learning and Digital Learning (ELDL 2023) and 11th International Conference on Sustainability, Technology and Education (STE 2023)* (pp. 11–18). IADIS Press. https://doi.org/10.33965/EL_STE2023_202303L002
- Huang, W., Johnson, T., & Han, S. (2013). Impact of online instructional game features on college students' perceived motivational support and cognitive investment: A structural equation modeling study. *The Internet and Higher Education*, *17*, 58–68. https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2012.11.004
- Perrotta, C., Featherstone, G., Aston, H., & Houghton, E. (2013). *Game-based learning: Latest evidence and future directions* (NFER Research Programme: Innovation in Education). National Foundation for Educational Research.
- Piñero Charlo, J. C., Canto López, M. D. C., & Caballero Leiva, C. (2024). Treating trainee teacher's mathematical anxiety by using game-based learning: A case study. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *38*, e220218. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a220218
- Plass, J., Homer, B., & Kinzer, C. (2015). Foundations of game-based learning. *Educational Psychologist*, *50*(4), 258–283. https://doi.org/10.1080/00461520.2015.1122533

- Prensky, M. (2001). *Digital game-based learning.* McGraw-Hill.
- Vidakis, N., Barianos, A. K., Trampas, A. M., Papadakis, S., Kalogiannakis, M., & Vassilakis, K. (2019). Generating education in-game data: The case of an ancient theatre serious game. In H. Lane, S. Zvacek, & J. Uhomoibhi (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference on Computer Supported Education (CSEDU): Vol. 1* (pp. 36–43). SCITEPRESS - Science and Technology Publications. https://doi.org/10.5220/0007810800360043
- Zabala-Vargas, S. A., García-Mora, L. H., Ardila-Segovia, D. A., & de Benito-Crosetti, B. L. (2019). Motivation increase of mathematics students in engineering – A proposal from game based learning. In *2019 International Symposium on Engineering Accreditation and Education (ICACIT)* (pp. 1–6). IEEE. https://doi.org/10.1109/ICACIT46824.2019.9130297

IA e feedback formativo nella didattica della matematica universitaria: una sperimentazione su problemi aperti

Michele Giuliano Fiorentino[1], Antonella Montone[1]
[1] Università degli studi di Bari Aldo Moro
michele.fiorentino@uniba.it

La crescente diffusione dell'Intelligenza Artificiale (IA) nella didattica universitaria apre nuove prospettive per la valutazione formativa e per i processi di feedback, in particolare nei contesti ad alta numerosità studentesca, in cui diventa difficile offrire una revisione tempestiva e personalizzata. In questo contributo si presenta un'esperienza di sperimentazione condotta nell'ambito del progetto PRIN "AI&F" (Artificial intelligence & feedback for effective learning) (Foschi et al., 2024), focalizzata sull'integrazione di strumenti di IA nel processo valutativo di attività riguardanti la Didattica della Matematica, nell'ambito di corsi universitari.

L'attenzione è posta sui problemi aperti, intesi secondo l'accezione di Pehkonen (1995) come situazioni problematiche che ammettono più soluzioni, approcci risolutivi e strategie argomentative. Questi compiti, centrati sul ragionamento e la modellizzazione più che su l'univocità del risultato, sono ampiamente utilizzati nella didattica della matematica e pongono sfide specifiche. Tali caratteristiche rendono particolarmente adatto l'uso di sistemi di feedback automatizzato capaci di restituire una valutazione centrata sui processi piuttosto che solo sui prodotti.

Metodologia

In linea con il concetto di formative assessment, come leva per l'apprendimento (Black & Wiliam, 1998), il progetto ha implementato modelli linguistici e tecniche di machine learning per analizzare elaborati scritti da studenti e fornire feedback individualizzati in tempi rapidi. Il modello permette l'interazione iterativa tra studente, docente e IA, consentendo di attivare processi di autoriflessione, revisione e consapevolezza del proprio percorso risolutivo. L'integrazione tra automazione e guida umana ha mostrato potenziale per una valutazione più equa e trasparente, oltre che sostenibile nei grandi numeri.

Due problemi sono stati oggetto della sperimentazione: il primo, di natura geometrica, propone a due fratelli di dividere equamente un terreno rettangolare con un metodo che prevede il collegamento di un punto interno ai vertici del rettangolo, dando origine a quattro triangoli. La richiesta riguarda la validità della divisione in parti eque e richiede argomentazioni che la giustifichino.

Il secondo problema, in ambito aritmetico, parte dalla costruzione della "tavola del 100", una tavola costituita da 10 righe e 10 colonne in cui sono presenti i numeri da 1 a 100: agli studenti viene chiesto di esplorare e spiegare regolarità numeriche nelle diagonali di un quadrato 2×2 preso dalla tavola, osservando e giustificando proprietà relative alla somma e al prodotto dei numeri disposti sulle diagonali. Entrambi i problemi stimolano pensiero critico, generalizzazione e costruzione autonoma del significato.

Risultati

I risultati preliminari mostrano che un sistema di feedback coadiuvato da IA è in grado di cogliere elementi rilevanti del ragionamento matematico, restituendo agli studenti informazioni utili e personalizzate in tempi brevi. Il contributo discuterà infine le implicazioni pedagogiche e operative di tale approccio e le prospettive di estensione del modello ad altri ambiti della matematica.

Conclusioni

L'utilizzo di un sistema automatizzato, così come definito, coadiuvato dalla AI, per la clusterizzazione delle risposte, la correzione delle stesse, l'invio di feedback e la valutazione di compiti, richiede uno studio delle potenzialità che tale sistema deve possedere, in riferimento agli aspetti specifici delle diverse discipline.

In tale scenario, sembra essere necessario caratterizzare l'utilizzo del sistema automatizzato, a seconda della disciplina che lo utilizza. In particolare, ci si interroga su quanto la specificità disciplinare (per es. in discipline differenti come matematica e pedagogia) possa influire sull'assetto del sistema stesso. I compiti autentici, utilizzati in ambito matematico, sono caratterizzati da soluzioni complesse da diversi punti di vista: la varietà delle strategie risolutive, il linguaggio altamente specializzato e l'utilizzo di rappresentazioni grafiche, geometriche e algebriche.

Lo studente, infatti, può scegliere e applicare diverse strategie risolutive utilizzando varie rappresentazioni. Pertanto, è necessario educare il sistema automatizzato a riconoscere la logica sottostante e valutare la chiarezza, la correttezza e la completezza del ragionamento effettuato (Fiorentino et al., 2024). Gli sforzi fino ad ora compiuti con l'obiettivo di migliorare la pratica educativa, attraverso questi nuovi mezzi, sono giustificati dagli innumerevoli vantaggi che essi offrono sia ai docenti sia agli studenti.

Bibliografia

- Foschi, L. C., Doria, B., Laici, C., Gratani, F., Screpanti, L., Fiorentino, M.G., Rossi, P.G., Giannandrea, L., Grion, V., & Montone, A. (2025), AI e Feedback. Interazione tra agenti umani e artificiali per valutare prove scritte in ambito universitario, *EDUCATION SCIENCES AND SOCIETY*, *2/2024*, 142-156. https://dx.doi.org/10.3280/ess2-2024oa18951
- Pehkonen, E. (1997). Introduction to the concept "open-ended problem." *Use of open-ended problems in mathematics classroom (Issue 7).* http://coreylee.me/en/publications/2001_selfefficacy_change.pdf
- Fiorentino, M.G., Montone, A., & Ricciardiello, G. (2024). The Feedback in a Formative Assessment Path: Development of Communicative Skills in a Workshop Online. In G. Casalino, R. Di Fuccio, G. Fulantelli, P. Raviolo, P. C. Rivoltella, D. Taibi, & G. A. Toto (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Higher Education Learning Methodologies and Technologies Online* (pp. 250-261). Cham: Springer Nature Switzerland. 10.1007/978-3-031-67351-1
- Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment *Evaluation and Accountability*, *21*(1), 5-31.

Ambienti di apprendimento blended per la didattica universitaria: oggettivazione e soggettivazione in contesti di pratica abilitati dal plugin Quick Chat

Umberto Dello Iacono[1], George Santi[2]
[1] Università della Campania "L. Vanvitelli"
[2] Università di Pavia
umberto.delloiacono@unicampania.it

Fornire agli studenti opportunità di incontrare il sapere matematico in modi ricchi e significativi e di co-posizionarsi criticamente nei confronti di tale sapere sono certamente questioni che riguardano l'educazione matematica. Nel contesto della presente ricerca, il co-posizionamento si riferisce al movimento consapevole degli studenti universitari, possibili futuri insegnanti di matematica, nelle attività di produzione di conoscenza specialistica e al modo in cui essi affermano la propria soggettività nelle attività di formazione come insegnanti di matematica

Questa ricerca è in continuità con quanto presentato nel Workshop 2024 del gruppo DIGiMATH. Lo scopo è esaminare come i corsi di educazione matematica per futuri insegnanti siano influenzati da un ambiente di apprendimento misto, in presenza e online su Moodle con l'uso del plugin Quick Chat. Il plugin è stato realizzato nell'ambito del progetto Learning Interface for Mathematics Education (LIME) presso l'Università della Campania "L. Vanvitelli" e consente agli studenti e all'insegnante di gestire in un'unica pagina del browser sia il compito sia tutte le chat in cui sono coinvolti (Dello Iacono et al., 2021).

Dello Iacono e Fiorentino (2023) hanno mostrato come l'uso del plugin Quick Chat migliori l'esperienza e l'efficacia della collaborazione online degli studenti. L'insegnante è in grado di monitorare tutte le conversazioni per intervenire efficacemente in tempo reale. Dello Iacono e Santi (2024; 2025) hanno evidenziato come l'introduzione del plugin modifichi lo schema dell'attività introdotto dalla Teoria dell'Oggettivazione favorendo l'emergere di sistemi dinamici e fluidi che consentono nuove forme di joint labor.

In questo lavoro, descriviamo uno studio che ha coinvolto 15 studenti di laurea magistrale in matematica frequentanti il corso di Didattica della Matematica presso l'Università della Campania "L. Vanvitelli". Gli studenti, potenziali futuri insegnanti, hanno lavorato in presenza a un'attività pensata per farli riflettere su misconcezioni e metodologie didattiche. Hanno discusso tra loro e con il docente in piccoli gruppi e in plenaria dapprima in ambiente Moodle utilizzando il plugin Quick Chat e poi in presenza. Al termine dell'attività, hanno risposto a un questionario di riflessione su quanto fatto da un punto di vista di futuri insegnanti. Hanno infine risposto al termine del corso a un questionario metacognitivo su tutto il percorso svolto e sui momenti ritenuti più significativi.

La struttura del joint labour abilitata dall'introduzione del plugin Quick Chat gioca un ruolo fondamentale nel plasmare l'interazione tra studenti e insegnante nello svolgimento del compito. Discutiamo la dialettica tra oggettivazione e soggettivazione (Radford, 2014; 2021) mostrando il posizionamento degli studenti nel loro percorso di formazione come futuri insegnanti di matematica rispetto al concetto di retta tangente a una curva in punti di non derivabilità (Vinner, 2022).

I risultati mostrano interessanti dinamiche Sapere-conoscenza nel posizionamento degli studenti come futuri insegnanti di matematica rispetto al concetto di tangente a una curva. Si tratta di studenti di matematica della laurea magistrale che hanno già oggettivato i concetti di tangente e derivata a livelli di generalizzazione simbolica tipici del Sapere universitario. L'attività, nella configurazione di joint labour descritta sopra, costringe gli studenti a riattivare la dinamica Sapere-conoscenza e ri-attualizzare un Sapere. Alcuni studenti hanno fatto riferimento a una nozione statica di tangente (la retta che "tocca" la curva in un solo punto) la cui equazione è y=f(x0)+f'(x0)(x-x0) e la cui esistenza è garantita dall'esistenza della derivata prima in x0. L'attualizzazione di altri studenti, invece, è stata dinamica poiché hanno considerato la curva in un intorno del punto x0 osservando il comportamento della retta tangente allo "scorrere" dell'ascissa x in tale intorno.

L'ambiente Moodle e in particolare il plugin Quick Chat assumono un ruolo decisivo nel plasmare nuove forme di joint labour, impossibili da realizzare senza l'uso di tecnologie digitali. D'altro canto, un ambiente ricco di potenzialità non troverebbe una implementazione efficace senza un quadro teorico di riferimento. Questo lavoro mostra come l'uso della tecnologia necessiti di un inquadramento teorico dettato dalla ricerca (in Didattica della Matematica e, nel caso specifico, dalla Teoria dell'Oggettivazione). Questa ricerca può essere implementata nei programmi di sviluppo professionale degli insegnanti, dove il plugin Quick Chat può essere utilizzato nelle attività di formazione per la collaborazione tra insegnanti oppure essere il risultato di tale collaborazione (Brodie, 2020). Riteniamo che la metodologia utilizzata si adatti a tutti i corsi universitari, anche se occorrono ulteriori ricerche per comprendere le dinamiche del joint labour in contesti deputati all'apprendimento della matematica e non alla formazione insegnanti.

Bibliografia

- Brodie, K. (2020). Resources for and from collaboration: A conceptual framework. In H. Borko, & I. Potari (Eds.), *Proceedings of the twenty-fifth ICMI study*, (pp. 37-48). Springer.
- Dello Iacono, U., Amorese, T., Cuciniello, M., Mannillo, C.V. (2021). User-friendly interfaces for Vygotskian computer-based learning activities. *Journal of Systemics, Cybernetics and Informatics(JSCI)*, *19*(2), 23-29.
- Dello Iacono, U., & Fiorentino, G. (2023). Using the Moodle Quick Chat plugin to promote student online interactions and teacher's ability to monitor them. In G. Casalino, R. Di Fuccio, G. Fulantelli, P. Raviolo, P. C. Rivoltella, D. Taibi, & G. A. Toto (Eds.), *Book of abstracts of the 5th International Conference on Higher Education Learning Methodologies and Technologies Online (HELMeTO 2023)*, (pp. 74-76), Foggia, Italy.
- Dello Iacono, U., & Santi, G. (2024). Prospective mathematics teachers' subjectification processes: joint labor in a Moodle environment through Quick Chat plugin. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, *52*, 342-355.
- Dello Iacono, U., & Santi, G. (2025). Mathematics teacher education in a computer-based environment: joint labor using Moodle Quick Chat plugin. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, https://doi.org/10.1080/0020739X.2025.2473562.
- Radford, L. (2014). On teachers and students: an ethical cultural-historical perspective. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan, (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting 1 - 1 of PME 38 and PME-NA 36*, *1*, (pp. 1-20). PME.
- Radford, L. (2021). *The Theory of Objectification*. Sense.
- Vinner, S. (2002). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library* , *11*. Springer.

Un dispositivo didattico blended per la formazione docenti in ottica interdisciplinare

Ileana Bodini[1], Silvia Ceccacci[2], Agnese I. Telloni[2], Valerio Villa[1]
[1] Università degli Studi di Brescia
[2] Università degli Studi di Macerata
agnese.telloni@unimc.it

Nella ricerca recente, la formazione dei docenti e l'interdisciplinarità vengono considerate tra le sfide di maggiore interesse per la didattica della matematica (Bakker et al., 2021). Inoltre, molti studi evidenziano la necessità di comprendere a fondo potenzialità e limiti della formazione iniziale e in servizio dei docenti in modalità e-learning o blended (Perry et al., 2021). Nel contesto di una ricerca più ampia sulla combinazione fra l'approccio interdisciplinare e l'utilizzo delle tecnologie digitali per lo sviluppo professionale degli insegnanti (Fiorentino et al., 2022), in questo lavoro viene presentato il modello teorico di un dispositivo didattico (Merieu, 2009) progettato in un'ottica interdisciplinare e destinato ad una modalità blended.

Tre ricercatori in didattica della progettazione industriale e una ricercatrice in didattica della matematica propongono un'attività di formazione docenti imperniata sulla *materializzazione concettuale*, processo che consiste nella concretizzazione di idee fondanti per una o più discipline attraverso artefatti che fungano da mediatori didattici.

Le radici teoriche dell'idea di materializzazione concettuale affondano negli studi di Montessori (1934), Dewey (1938) e nelle teorie costruttiviste dell'apprendimento. Nell'ambito della didattica della matematica, Bartolini Bussi e Mariotti (2008) hanno elaborato la Teoria della Mediazione Semiotica, evidenziando come la manipolazione e l'uso di artefatti possano mediare semioticamente, cioè attraverso la produzione individuale e collettiva di segni (rappresentazioni grafiche, espressioni linguistiche, gesti, ecc.) via via più evoluti, l'apprendimento della disciplina. La nostra ricerca si concentra sulla valenza educativa non soltanto dell'uso di artefatti, ma anche della fase precedente a tale uso, cioè il processo di trasformazione di idee astratte in prodotti o rappresentazioni concrete, che avviene attraverso le fasi di ideazione, progettazione, costruzione e analisi a posteriori. In particolare, la domanda di ricerca che affrontiamo riguarda la potenzialità del processo di materializzazione concettuale rispetto all'incremento di consapevolezza dei docenti in formazione iniziale.

Il dispositivo didattico che presentiamo si fonda sull'integrazione fra pensiero narrativo e pensiero logico (Bruner, 1986) ed è organizzata, in linea con il modello dell'apprendistato cognitivo (Collins et al., 1989), secondo la sequenza *modeling-coaching-scaffolding-fading*. Esso prevede le cinque seguenti fasi: a) i docenti sono invitati a leggere autonomamente un saggio sul ruolo della narrazione nel dare forma ai prodotti e alle idee; b) i docenti partecipano a una lezione interattiva online su come nasce una materializzazione concettuale; c) i docenti partecipano a una attività laboratoriale (in presenza o a distanza) di materializzazione concettuale di un concetto a loro scelta; d) i docenti partecipano a una sessione online di revisione e confronto con i formatori sulle materializzazioni concettuali proprie e altrui; e) i docenti partecipano a un incontro finale online di follow-up per riflettere sull'esperienza.

La modalità blended diventa così la chiave per attivare uno spazio di ricerca interdisciplinare, in cui è favorito lo scambio multidirezionale del feedback (dai formatori ai docenti e viceversa; fra i formatori; fra i docenti). Inoltre, sono valorizzate l'ottimizzazione delle risorse, la condivisione di eventuali dubbi e la tracciabilità dei progressi dei docenti nella propria materializzazione concettuale e nella riflessione su di essa.

Metodologia

In questo lavoro, discutiamo l'applicazione del dispositivo didattico in un caso di studio che ha coinvolto circa 80 docenti in formazione iniziale dell'Università di Macerata. Le studentesse e gli studenti che hanno partecipato alla sperimentazione hanno frequentato il corso di Metodi e Tecnologie per l'Insegnamento della Matematica, tenuto da una delle autrici, nell'anno accademico 2024-25. Il corso era incentrato, fra l'altro, sulla Teoria della Mediazione Semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Gli obiettivi dello studio si declinano su due piani distinti ma interconnessi: in prospettiva educativa, si vuole favorire lo sviluppo professionale di docenti in formazione iniziale attraverso un approccio blended e in ottica interdisciplinare; in prospettiva di ricerca, si vuole comprendere se e come la realizzazione di una materializzazione concettuale possa contribuire a incrementare la conoscenza e la consapevolezza del docente.

I dati raccolti e analizzati per la ricerca consistono delle schede di progettazione delle materializzazioni concettuali e delle schede di riflessione sull'esperienza fatta compilate dai docenti che hanno partecipato. Le schede sono state costruite allo scopo di far esplicitare ai docenti il potenziale semiotico dell'artefatto ideato e costruito, e di riflettere sull'impatto dell'esperienza sulla propria conoscenza e consapevolezza. L'analisi è stata condotta secondo il framework TPACK (Technological Pedagogical Content Knowledge, Mishra & Koehler, 2006), in particolare codificando stralci delle progettazioni degli studenti come riferibili alle seguenti tipologie di conoscenza: conoscenza dei contenuti disciplinari (*content knowledge*); conoscenza delle teorie pedagogiche e delle strategie didattiche (*pedagogical knowledge*); conoscenza e competenza nell'uso di strumenti tecnologici (*technological knowledge*).

Risultati

L'analisi condotta ha permesso di rilevare che tutti i docenti che hanno intrapreso il percorso di formazione hanno portato a termine la materializzazione concettuale di un artefatto da loro ideato e hanno consegnato le schede di progettazione e di riflessione. Inoltre, le schede prodotte hanno mostrato che la materializzazione concettuale ha favorito la presa di coscienza e l'incremento di consapevolezza dei partecipanti a livelli diversi. Nelle schede di progettazione i docenti si sono concentrati prevalentemente sui significati matematici dei concetti che hanno deciso di materializzare (*"volevo costruire un artefatto che consenta agli studenti di sviluppare una concezione relazionale del simbolo =, inteso come espressione di un'equivalenza tra due quantità"*), riferibili alla *content knowledge*. Inoltre, hanno ponderato e motivato le scelte di design sulla base di misconcezioni comuni e di considerazioni didattiche, riferibili alla *pedagogical knowledge* (*"La bilancia a bracci uguali rende concreto e intuitivo questo concetto [. . .]. Quando i due piatti della bilancia sono alla stessa altezza, ossia in equilibrio, ciò che vi è collocato sopra ha lo stesso valore. La bilancia diviene una metafora visiva potente [....]. L'artefatto fornisce un feedback intrinseco a basso impatto, [...] se viene commesso un errore il bambino si corregge in autonomia, in modo naturale, in quanto è l'artefatto in disequilibrio a fargli capire che c'è qualcosa che non va"*). Nella scheda di riflessione è tipicamente emersa l'analisi critica degli artefatti prodotti (*"Una delle principali debolezze della bilancia a due bracci è che tiene conto solo della massa fisica"*) e la conseguente proposta dell'uso di artefatti digitali con cui integrare quelli fisici (*"è quindi fondamentale affiancarla in un secondo momento alla bilancia digitale. Essa, infatti, pur non offrendo il contatto diretto con gli oggetti, permette di visualizzare situazioni più complesse che vanno oltre il limite fisico del peso"*). Tali aspetti sono riferibili, oltre che alla *pedagogical knowledge*, anche alla *technological knowledge*. Infine, nelle schede di riflessione i docenti in formazione hanno spesso riportato considerazioni sull'impatto del percorso sulla propria professionalità docente (*"Questo percorso di progettazione mi ha aiutata [...] anche a ricostruire il mio stesso sapere matematico in modo più consapevole"*).

Bibliografia

- Bakker, A., Cai, J., & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, *107*, 1–24. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w
- Bartolini Bussi, M.G., & Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2^{nd} revised ed., pp. 746-783). New York and London: Routledge / Taylor & Francis Group.
- Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser*, 453–494. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fiorentino, M.G., Montone, A., Rossi, P.G., & Telloni, A.I. (2023). A Digital Educational Path with an Interdisciplinary Perspective for Pre-service Mathematics Primary Teachers' Professional Development. In G. Fulantelli, D. Burgos, G. Casalino, M. Cimitile, G. Lo Bosco, & D. Taibi (Eds.), *Proceedings of the Conference Higher Education Learning Methodologies and Technologies Online. HELMeTO 2022. Communications in Computer and Information Science*, vol 1779. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29800-4_50
- Dewey, J. (1938). *Experience and education*. New York: Macmillan.
- Montessori, M. (1934). *Psicoaritmetica: Il materiale per lo sviluppo del calcolo aritmetico nelle scuole elementari*. Milano: Garzanti.
- Meirieu, P. (2009). *The Choice to Educate: Ethics and Pedagogy*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017–1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x
- Perry, T., Findon, M., & Cordingley, P. (2021). Remote and Blended Teacher Education: A Rapid Review. *Education Sciences*, *11* (8).https://doi.org/10.3390/educsci11080453

Formazione insegnanti e tecnologie digitali per la matematica: un'esperienza con GeoGebra

Angelica Malaspina
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate, Università degli Studi della Basilicata, Potenza, Italia
angelica.malaspina@unibas.it

Il crescente dibattito sull'integrazione delle tecnologie digitali nei processi di apprendimento e insegnamento della matematica evidenzia la necessità di supportare i docenti con percorsi formativi mirati che vadano oltre la semplice acquisizione di competenze tecniche. Numerosi studi, infatti, dimostrano come l'impiego delle tecnologie favorisca processi di apprendimento più efficaci, in particolare in termini di visualizzazione, esplorazione interattiva e costruzione attiva del sapere matematico (Hoyles & Noss, 2011; Ruthven et al., 2008). Tra gli strumenti più diffusi in ambito educativo, GeoGebra si distingue per la sua capacità di integrare geometria, algebra e rappresentazione grafica in un unico ambiente dinamico.

Tuttavia, perché queste potenzialità possano tradursi in un effettivo cambiamento delle pratiche didattiche, è fondamentale che gli insegnanti siano accompagnati in percorsi di formazione continua che sviluppino non solo competenze tecniche, ma anche consapevolezza pedagogica e una riflessione critica sul valore delle tecnologie stesse (Artigue, 2002; Drijvers, 2013).

In questo contesto teorico si inserisce il presente contributo, che descrive un'esperienza formativa rivolta a insegnanti della scuola secondaria, svolta tra marzo e aprile 2025 presso l'Università degli Studi della Basilicata. Il percorso, intitolato Tecnologie digitali per la matematica e studio pratico delle simmetrie, ha fatto parte delle attività organizzate dal Polo della Basilicata della Fondazione "I Lincei per la Scuola" ed è stato articolato in cinque incontri da tre ore ciascuno, alternando momenti teorici e laboratori pratici.

Questo contributo prende in esame i tre incontri dedicati a GeoGebra, parte integrante del corso, durante i quali i docenti sono stati guidati in un percorso progressivo di esplorazione e utilizzo del software, con particolare attenzione all'integrazione con i contenuti disciplinari. I due incontri conclusivi sono stati curati dalla prof.ssa Marién Abreu (Università degli Studi della Basilicata) e dedicati alla costruzione di figure piane e tridimensionali mediante origami, con l'obiettivo di esplorare il concetto di simmetria attraverso un approccio manipolativo e tangibile.

Il presente contributo si propone di rispondere alla seguente domanda:

> RQ) In che modo un percorso di formazione rivolto a docenti di scuola secondaria può supportare un uso consapevole, integrato e didatticamente efficace di GeoGebra, andando oltre l'utilizzo strumentale delle tecnologie?

Il metodo scelto è stato quello del laboratorio attivo e riflessivo, in cui i partecipanti hanno avuto modo di sperimentare in prima persona le potenzialità del software, alternando momenti di esplorazione autonoma a fasi di confronto e discussione collettiva.

L'interfaccia di GeoGebra è stata introdotta gradualmente: si è lavorato su slider, caselle di controllo, pulsanti personalizzati, input algebrico diretto, con attenzione alla personalizzazione delle costruzioni per l'uso in classe. Particolare cura è stata posta nello sviluppo di attività che connettessero rappresentazioni geometriche e algebriche, favorendo il passaggio dall'intuizione visiva alla formalizzazione.

Un aspetto distintivo del percorso è stato il focus sull'algebra geometrica, in particolare attraverso la rappresentazione dinamica di identità algebriche classiche, ispirate alle proposizioni del Libro II degli *Elementi* di Euclide. Un esempio emblematico è costituito dalla Proposizione 4, che afferma:

> Se un segmento viene tagliato a caso, il quadrato costruito sull'intero segmento è uguale ai quadrati costruiti sui segmenti e al doppio del rettangolo delimitato dai segmenti.

Questa proposizione rappresenta, in forma geometrica, la formula $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. La sua costruzione dinamica con GeoGebra (Figura 1) ha permesso ai docenti di riflettere sul valore didattico di GeoGebra come strumento per costruire il significato matematico anziché trasmetterlo in forma finita.

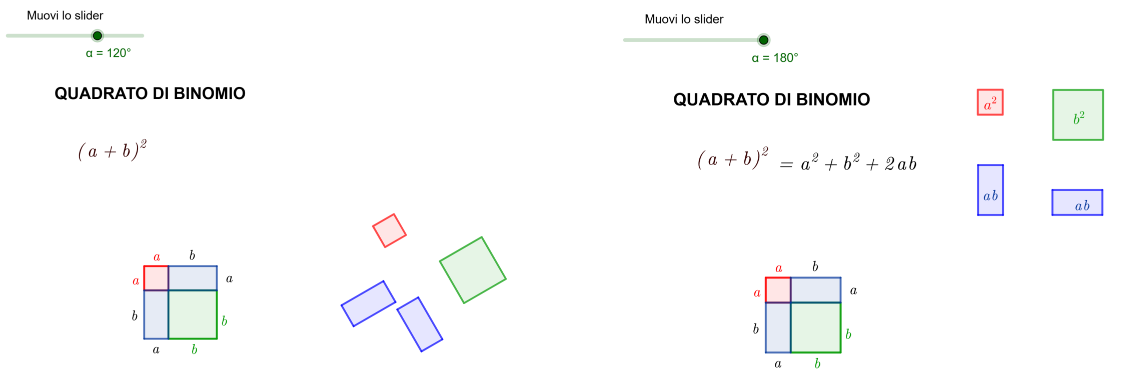


Figura 1: Visualizzazione con GeoGebra della formula $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. L'uso dello slider rende dinamica la costruzione geometrica, permettendo di evidenziare in modo progressivo la connessione tra le aree colorate e i termini dell'identità algebrica.

L'integrazione tra geometria e algebra, mediata dalle funzionalità di GeoGebra, ha stimolato riflessioni metodologiche sul valore della rappresentazione dinamica per la costruzione del significato matematico. Non si è trattato semplicemente di "insegnare a usare uno strumento", ma di mostrare come la tecnologia possa diventare un ambiente cognitivo in cui concetti astratti prendono forma, diventano esplorabili, manipolabili, condivisibili.

Al termine del corso è stato somministrato un questionario di feedback, a cui hanno risposto 33 docenti, di cui la maggioranza erano donne (93,9%) con una lunga esperienza di insegnamento (48,5% con oltre 30 anni di servizio). Oltre il 60% ha valutato gli argomenti come "molto chiari", più del 70% li ha trovati "molto interessanti" e la quasi totalità ha dichiarato che i contenuti sono stati applicabili alla propria pratica didattica (Figura 2).

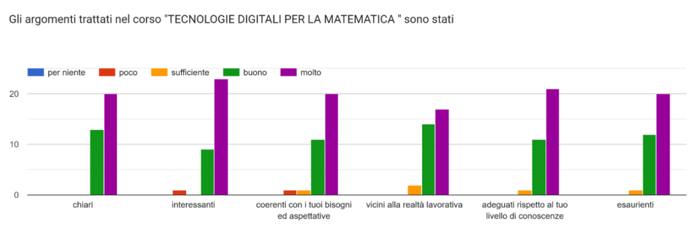


Figura 2: Distribuzione delle valutazioni degli argomenti del corso.

L'analisi dei commenti aperti ha evidenziato in particolare l'apprezzamento dei partecipanti per la "modalità laboratoriale vera", la "ricaduta didattica immediata", elementi che hanno contribuito a un coinvolgimento autentico e a una percezione di utilità concreta del corso. Tra i suggerimenti emersi, è stato richiesto più tempo per esercitazioni, approfondimenti per il triennio (es. funzioni e trigonometria), e maggiore spazio a GeoGebra 3D. Significativo il fatto che 30 partecipanti su 33 hanno espresso il desiderio di seguire un ulteriore corso su GeoGebra.

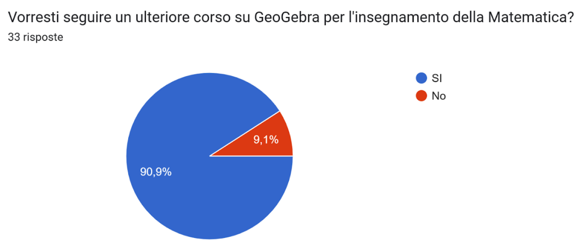


Figura 3: Intenzione dei docenti a partecipare a ulteriori corsi su GeoGebra.

Per rispondere a queste esigenze, è in fase di progettazione per l'anno scolastico 2025–2026 un nuovo percorso formativo dedicato alle tecnologie digitali e goniometria, sempre nell'ambito delle attività del Polo Lincei della Basilicata.

L'esperienza condotta conferma l'importanza della formazione continua dei docenti per un uso consapevole delle tecnologie digitali in matematica. GeoGebra, in particolare, si è rivelato uno strumento efficace per attivare dinamiche didattiche laboratoriali, visuali e partecipative. L'ampia partecipazione e il feedback ricevuto incoraggiano a proseguire su questa strada, rafforzando il legame tra innovazione tecnologica e didattica disciplinare.

Bibliografia

- Hoyles, C., & Noss, R. (2011). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 323-349) Springer: Dordrecht, The Netherlands.
- Ruthven, K., Hennessy, S., & Deaney, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers & Education*, *51*(1), 297-317. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2007.05.013
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245-274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080
- Drijvers, P. (2013). Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't). *PNA*, *8*(1), 1-20. https://doi.org/10.30827/pna.v8i1.6120

Il MOOC "Le derivate come si calcolano?" come artefatto didattico complesso: progettazione, mediazione tecnologica e concettualizzazione della derivata

Domenico Brunetto [1], Monica Conti[1]
[1] Politecnico di Milano
domenico.brunetto@polimi.it

L'analisi matematica costituisce una componente centrale nei curricula delle discipline scientifiche, rappresentando un passaggio fondamentale per lo sviluppo di competenze trasversali e specifiche in ambito STEM. Tuttavia, è anche uno degli insegnamenti che più frequentemente mette in difficoltà gli studenti, soprattutto all'inizio del loro percorso universitario (Gómez-Chacón et al., 2015; Andrà et al., 2019). Se da un lato il concetto di derivata è necessario per affrontare al meglio tutte le discipline tecnico-scientifico in ambito universitario, dall'altro risulta essere una delle difficoltà maggiori per gli studenti. Numerosi studi (es., Orton, 1983; Zandieh, 2000, Habre & Abboud, 2006; Andrà et al., 2019) hanno infatti evidenziato le difficoltà concettuali legate alle sue molteplici rappresentazioni - simboliche, grafiche, numeriche e verbali - che richiedono il passaggio tra diversi registri semiotici (Duval, 2006). Queste difficoltà influenzano negativamente anche la comprensione e la corretta applicazione delle regole algebriche per il calcolo delle derivate (Ryberg, 2018).

Di fronte a questa sfida, l'impiego di risorse didattiche digitali può rappresentare una leva significativa per promuovere l'apprendimento attivo e personalizzato. In questo contesto si inserisce il MOOC *"Le derivate: come si calcolano"*, sviluppato dal Laboratorio FDS del Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano e ospitato sulla piattaforma *Polimi Open Knowledge (www.pok.polimi.it)* e su *Coursera* (www.coursera.org) nelle due versioni in italiano e inglese. Inoltre, il MOOC in oggetto è il primo del progetto *Edvance - Digital Education Hub*[1] nella categoria "Matematica, Fisica e Ingegneria".

Il MOOC è rivolto a studenti dell'ultimo anno della scuola secondaria e del primo anno universitario, con l'obiettivo di offrire una risorsa flessibile e interattiva per supportare l'apprendimento del calcolo differenziale. Il corso si articola in quattro settimane e comprende video-lezioni strutturate, esercizi svolti, quiz autovalutativi e approfondimenti teorici. Nel contributo discutiamo gli elementi progettuali del MOOC e la sua integrazione nel contesto del corso di matematica per il primo anno del Corso di Laurea in Architettura del Politecnico di Milano, un ambiente formativo eterogeneo in cui convivono studenti con background matematici molto diversi e con aspettative spesso distanti dalla formalizzazione astratta tipica dell'analisi. La scelta di introdurre il MOOC come supporto blended nasce dalla volontà di offrire un'esperienza di apprendimento flessibile, personalizzabile e accessibile anche al di fuori delle ore di lezione, con l'intento di rafforzare la comprensione concettuale e colmare eventuali lacune pregresse.

Per inquadrare in modo sistematico il ruolo del MOOC nel processo didattico, adottiamo il modello del tetraedro didattico per l'e-learning (Albano, Faggiano & Mammana, 2013), che consente di interpretare il corso online come artefatto digitale complesso, frutto di un intreccio di relazioni tra attori, contenuti e strumenti. A differenza del classico triangolo didattico (che coinvolge insegnante, studente e contenuti), il tetraedro introduce un quarto vertice, permettendo di esplorare in modo più ricco e articolato le dinamiche

[1] Edvance (www.edvance.it) è una rete che vede Politecnico di Milano come capofila di una rete di 14 università, 4 AFAM e 24 partner associati per mettere a disposizione del sistema Italia corsi online di alta qualità su Intelligenza Artificiale, Data literacy, Digital sustainability e transdisciplinarità. Edvance è finanziato dal MUR nell'ambito del PNRR.

dell'apprendimento mediate dalla tecnologia. Il modello si sviluppa attorno a quattro vertici fondamentali: Autore (A), Studente (S), Tutor (T) e Conoscenza matematica (M). Le quattro facce del tetraedro permettono di analizzare diverse dimensioni dell'esperienza formativa, ciascuna focalizzata su una particolare triangolazione di ruoli e significati. Questo approccio offre una griglia interpretativa per analizzare il MOOC non solo come contenitore di contenuti, ma come ecosistema didattico dinamico.

Riportiamo i risultati preliminari dell'analisi del MOOC, strutturati secondo le quattro facce del quadro teorico adottato.

- *ASM (Autore - Studente - Matematica)* - Apprendimento autonomo guidato dalla trasposizione didattica.
  L'autore organizza i contenuti in video strutturati in quattro fasi: introduzione intuitiva, enunciato del teorema, esempio applicativo, idea della dimostrazione. La piattaforma funge da ambiente affidabile, coerente e chiuso, che consente agli studenti di accedere in autonomia a contenuti concettualmente e proceduralmente strutturati. La personalizzazione è supportata da contenuti multimodali (video, testo, quiz) e dalla libertà dello studente di scegliere il proprio percorso di studio.
- *STM (Studente - Tutor - Matematica)* - Apprendimento collaborativo e supportato dal tutor.
  Anche se il MOOC non prevede un tutor "umano" sempre presente, funge da tutor automatizzato: guida lo studente attraverso esercizi, quiz e approfondimenti con feedback. Le attività collaborative (es. peer teaching, flipped classroom) sperimentate al Politecnico di Milano, come la discussione in classe dopo lo studio del video e i gruppi di lavoro, incarnano pienamente questa faccia. L'uso asincrono e sincrono amplia l'interazione con la matematica in contesti guidati.
- *ATM (Autore - Tutor - Matematica)* - Ingegneria didattica e progettazione dei contenuti.
  I contenuti sono progettati con attenzione alle difficoltà procedurali e concettuali (es. uso scorretto delle regole di derivazione). È chiara la presenza di trasposizione didattica (da conoscenza esperta a contenuto accessibile) e l'integrazione significativa della tecnologia per la presentazione visiva e dinamica dei concetti. L'interazione tra autore e "tutoraggio implicito" (automazioni, esercitazioni, scaffolding) fa emergere una forte progettazione pedagogica.
- *AST (Autore - Studente - Tutor)* - Feedback e co-produzione.
  Gli studenti possono elaborare nuovi compiti a partire dai materiali esistenti, specialmente nei contesti di co-teaching e peer-teaching. Gli insegnanti che adottano il MOOC nei propri corsi (es. flipped classroom) diventano parte della figura "tutor" e possono fornire feedback agli autori, chiudendo il ciclo progettuale. Le pratiche del Peer Teaching e della co-produzione in classe trasformano lo studente in un "co-autore", in linea con la filosofia della faccia AST. La progettazione della "week 4 - Strumenti digitali", contestualmente al progetto Edvance, consente agli studenti di produrre nuovi task partendo da quelli presenti sul MOOC in modo da espandere la loro esperienza e preparazione aldilà dei contenuti definiti nel MOOC.

L'analisi mostra che una delle caratteristiche più innovative del MOOC *"Le derivate: come si calcolano?"* è la sua organizzazione modulare e narrativa, che guida lo studente attraverso un processo di costruzione concettuale — da un'introduzione intuitiva, passando per l'enunciato formale e l'applicazione, fino all'idea della dimostrazione — permettendo un equilibrio tra comprensione strumentale e relazionale (Skemp, 2006).

La progettazione riflette una solida attività di trasposizione didattica, supporta l'autonomia dello studente, offrendo un ambiente chiuso ma flessibile in cui apprendere in modo personalizzato. Il MOOC è anche pensato per essere integrato in contesti collaborativi e guidati, e per permettere agli studenti di espandere i materiali iniziali arricchendoli e rendendoli strumenti dinamici, come dimostrano le sperimentazioni prelimanari in aula. È in fase di progettazione una sperimentazione strutturata in aula, volta a indagare quantitativamente come il MOOC possa supportare gli studenti nel superamento delle difficoltà concettuali legate all'apprendimento delle derivate.

In sintesi, questo MOOC si configura come un artefatto didattico complesso in grado di attivare e sostenere processi di apprendimento significativi, in linea con le più avanzate riflessioni teoriche sull'e-learning in matematica, offrendo non solo un caso studio concreto, ma anche uno spunto metodologico per la progettazione di ambienti digitali significativi nel contesto dell'istruzione universitaria.

Bibliografia

- Andrà, C., Bernardi, G., & Brunetto, D. (2019). Teaching with emerging technologies in a STEM university math class. In J. Domenech, P. Merello, E. de la Poza, D. Blazquez, & R. Peña-Ortiz (Eds.), *Proceedings of 5th International Conference on Higher Education Advance* (pp. 963-971). Editorial Universitat Politécnica de Valéncia. http://dx.doi.org/10.4995/HEAd19.2019.9179
- Albano, G., Faggiano, E., & Mammana, M. F. (2013). A tetrahedron to model e-learning Mathematics. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, *23* (Supplemento 1), 429-436.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1), 103-131.
- Gómez-Chacón, I. M., Griese, B., Rösken-Winter, B., & Gónzalez-Guillén, C. (2015). Engineering students in Spain and Germany–varying and uniform learning strategies. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2117-2123). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.
- Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57-72.
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 235–250. https://doi.org/10.1007/BF00410540
- Ryberg, U. (2018). Generating different lesson designs and analyzing their effects: The impact of representations when discerning aspects of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *51*, 1-14. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.03.012
- Skemp, R. R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching in the middle school*, *12*(2), 88-95.
- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *8*, 103–127.

Animazioni in JavaScript 3D di una reinterpretazione geometrica della Formula di Newton Leibniz

Maria Antonietta Lepellere[1], Fabrizio Masullo[2]
[1] Università di Udine
[2] Nessuna affiliazione
maria.lepellere@uniud.it

La formula di Newton-Leibniz è una delle più grandi conquiste scientifiche della storia umana, con diversificate applicazioni in quasi tutte le scienze avanzate come in Chimica, Biologia, Economia, Fisica, Statistica e Ingegneria. Contenuta nel Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (TFC), permette di calcolare l'integrale definito tramite una sua primitiva. In questo contributo proponiamo una interpretazione geometrica diretta di questa formula. Inoltre, forniamo anche un'animazione 3D di tale approccio realizzata mediante la libreria open-source Three.js, https://threejs.org/, of JavaScript. Essa è stata progettata con scopi didattici pensando sia agli insegnanti delle scuole secondarie che ai docenti universitari.
Nella prassi scolastica l'integrale indefinito viene generalmente insegnato per primo come operazione inversa della derivazione e poi viene introdotto l'integrale definito, solo successivamente i due concetti vengono collegati mediante il TFC. Thompson et al. (2013) hanno trovato questo tipo di insegnamento problematico perché gli studenti intendono la derivata come ciò che ottengono applicando le regole di differenziazione e l'integrazione come l'area delimitata dalla curva, ma le connessioni tra tasso di variazione e accumulazione non vengono affrontate esplicitamente. E' interessante notare che già nel 1927, Toeplitz, sosteneva sulla base di dati storici, che l'integrale definito, e quindi l'integrale come accumulazione, dovrebbe precedere l'integrale indefinito nell'insegnamento. Studi precedenti hanno anche offerto diversi suggerimenti per migliorare l'insegnamento e l'apprendimento del TFC, come l'enfasi sulle funzioni di accumulazione rispetto all'approccio tradizionale (ad esempio, Thompson e Silverman, 2008) e l'integrazione della tecnologia digitale nell'insegnamento (ad esempio, Swidan e Fried, 2021). Nell'insegnamento della matematica è necessario combinare il metodo delle immagini e il metodo della definizione per migliorare le conoscenze esistenti e ampliarle con nuovi fatti, che è uno dei punti della teoria cognitiva dell'apprendimento multimediale. L'apprendimento digitale può stimolare l'interesse e migliorare la qualità dell'insegnamento della matematica. L'apprendimento umano tende a scaturire dall'interesse e dal bisogno, e nel pensiero, le immagini concrete hanno un vantaggio.
Prima di presentare l'idea che sta alla base dell'interpretazione geometrica alternativa della formula di Newton-Leibnitz, ricordiamo quella standard di integrale di Riemann: Sia $\Delta_i = \frac{b-a}{n}$ per un fissato numero naturale n e sia $x_i := a + i * \Delta_i$ per ogni $i \in \{0, \dots, n\}$. Si ha allora:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta_i. \tag{1}$$

Sia ora $F(x)$ una primitiva di f, ossia $F^{'}(x) = f(x)$, allora la formula di Newton-Leibniz stabilisce che l'integrale nell'equazione 1 è uguale alla differenza dei valori della primitiva calcolati negli estremi dell'intervallo, ossia $F(b) - F(a)$.

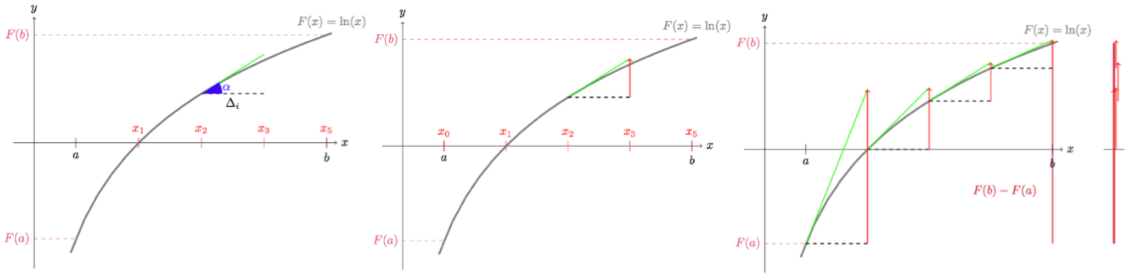


Figura 1: Interpretazione geometrica alternativa della formula di Newton-Leibnitz per $F(x) = \ln(x)$.

Questo modo di scrivere suggerisce una diversa interpretazione geometrica di $F^{'}(x_{i-1})\Delta_i$. Infatti, come mostrato in Figura 1 per il caso $F(x) = \ln(x)$, dal momento che $\tan(\alpha) = F^{'}(x_{i-1})$ è il coefficiente angolare della retta tangente (retta verde), il valore $F^{'}(x_{i-1})\Delta_i$ rappresenta il segmento orientato (in rosso) sull'asse y della retta che corrisponde ad un incremento sull'asse x di lunghezza Δ_i. La somma $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta_i$ è maggiore di $F(b) - F(a)$ ma si reduce man mano che n aumenta fino a corrispondere al valore esatto (per una trattazione completa vedere Masullo & Lepellere, 2025).

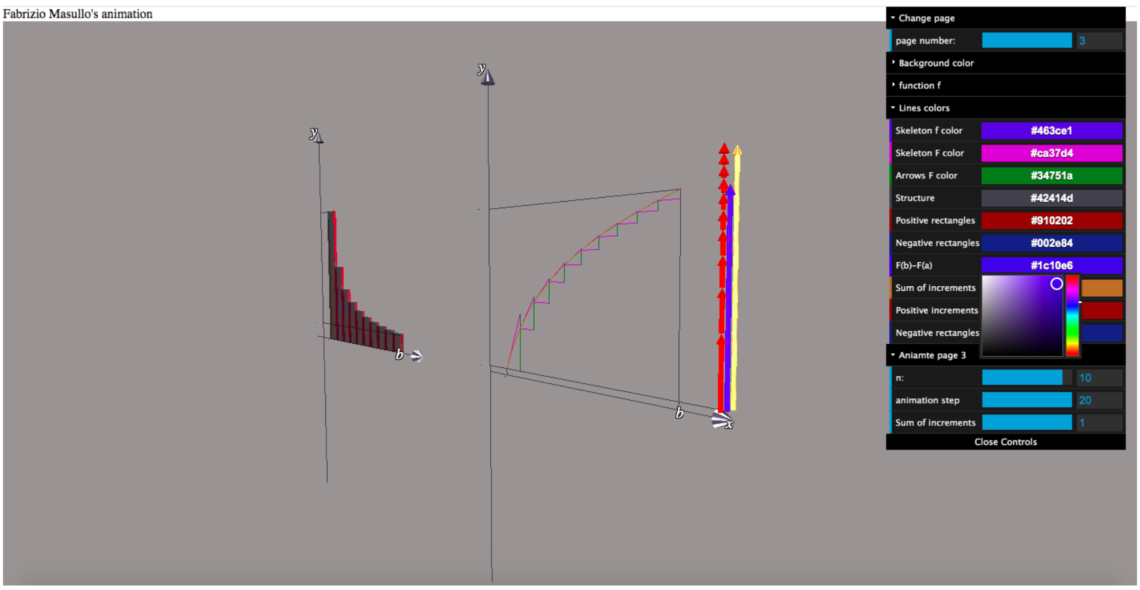


Figura 2: Interpretazione geometrica alternativa della formula di Newton-Leibnitz per $F(x) = \ln(x)$.

Descriviamo ora brevemente l'animazione 3D realizzata con la libreria javascript Three.js volta a fornire uno strumento interattivo per gli insegnanti. In particolare, nell'implementazione, abbiamo utilizzato l'interfaccia utente di Google (GUI) per produrre un pannello di comandi. Come possiamo vedere nella Figura 2, i comandi appaiono nell'angolo in alto a destra dell'animazione. E' possibile selezionare tre pagine diverse: Nella pagina 1 vengono riportate semplicemente il grafico di una funzione f e il grafico di una possibile primitiva $F^{'}(x) = f(x)$. In questa pagina è possibile solo ingrandire o rimpicciolire e ruotare i due sistemi di riferimento cartesiani. Nella pagina 2 viene riportata l'interpretazione geometrica proposta nel caso particolare in cui dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $n = 6$ parti. Anche in questa pagina è possibile solo ingrandire o rimpicciolire e ruotare i due sistemi di riferimento cartesiani. Nella pagina 3 viene fornita l'animazione interattiva che descriviamo brevemente di seguito. L'uso della GUI è piuttosto semplice: possiamo modificare tutti i comandi semplicemente con il mouse. In particolare, l'animazione della pagina 3 viene attivata con tre parametri: La variabile n ha un intervallo da 2 a 11 e permette di modificare il numero di rettangoli sotto la funzione f e il numero di incrementi nella primitiva F. Ad esempio, in Figura 2 incrementiamo n da 2 (che è il valore predefinito) a 8. Possiamo modificare anche il "passo di animazione" che ha un intervallo da 0 a 20. Il valore 0 corrisponde alla posizione originale degli incrementi sul grafico della primitiva F. Quindi, aumentando tale variabile, si genera un movimento degli incrementi. La posizione finale corrisponde al valore 20. Come possiamo vedere nell'immagine, il valore finale 20 fornisce il confronto tra tutti gli incrementi e una freccia che corrisponde al valore $F(b) - F(a)$. L'ultima variabile che possiamo modificare è chiamata "somma degli incrementi". Questa variabile ha solo due valori: il valore 1 mostra la somma degli incrementi in giallo, mentre il valore predefinito 0 non mostra la somma degli incrementi.

Le animazioni supportano in modo significativo i risultati di apprendimento: mostrano il metodo efficace per organizzare un percorso verso un'intuizione o una sorta di esperimento sui concetti/procedure; consentono, dopo la posizione di partenza, di ripetere un gran numero di passaggi necessari, cosa che non può essere fatta con il metodo carta e penna; le animazioni forniscono passaggi convergenti alla visione e arricchiscono la visione stessa, cosa che non può essere fatta efficacemente usando solo il metodo carta e penna; uno studente può ricevere ispirazione su come leggere/organizzare un'animazione o un esperimento per argomenti e concetti correlati. Il ruolo di un insegnante come facilitatore richiede di lasciare abbastanza spazio (in classe, in un ambiente informale o virtuale) per gli esperimenti di studio, cercando il percorso personale dello studente.

L'interpretazione geometrica proposta della formula di Newton Leibniz fornisce un modo diverso di visualizzare volto a rinforzare il legame tra tasso di variazione e accumulazione.

Bibliografia

- Masullo, F. & Lepellere, M.A. (In press). A Geometric interpretation of the Newton-Leibniz Formula and its animation in JavaScript 3D graphic. In *Proceedings of ICTMT17.*
- Swidan, O., & Fried, M. (2021). Focuses of awareness in the process of learning the fundamental theorem of calculus with digital technologies. *The Journal of Mathematical Behavior*, *62*, 100847. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100847
- Thompson, P. W., Byerley, C., & Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to calculus made possible by technology. *Computers in the Schools*, *30*(1-2), 124–147.
- Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43–52). Mathematical Association of America.

Promuovere la discussione matematica con Padlet: orientamenti e linee guida didattiche

Eugenia Taranto[1], Cody Alderson[2], Ferdinando Arzarello[3], Sara Bagossi[4], Silvia Beltramino[5], Paolo Cazzaniga[6], Chiara Giberti[7], Alice Lemmo[8]
[1] Università di Enna "Kore"
[2] University of New Brunswick
[3] Università di Torino
[4] Libera Università di Bolzano
[5] I.C. Maria Curie, Pinerolo
[6] Università di Bergamo
[7] Università di Modena e Reggio Emilia
[8] Università dell'Aquila
eugenia.taranto@unikore.it

La discussione matematica, definita come "purposeful talk on a mathematical subject in which there are genuine pupil contributions and interactions" (Pirie & Schwarzenberger, 1988, p.461), si configura come un'attività complessa che coinvolge studenti, insegnanti, risorse comunicative, tempi e spazi didattici. Essa mira a promuovere una comprensione profonda dei concetti matematici in gioco e capacità argomentative, superando un approccio meramente procedurale. Affinché sia efficace, è necessario affrontare alcune sfide: la riduzione del carico cognitivo degli studenti, l'integrazione funzionale degli strumenti digitali, la valorizzazione della partecipazione inclusiva e attiva nella costruzione del sapere (Giberti et al., 2024). È proprio in risposta a queste sfide che si colloca il progetto *Fostering mathematical discussion beyond the borders*, sviluppato nel corso del 2023 da un gruppo di ricercatori e insegnanti provenienti da Argentina, Canada, Israele e Italia e parzialmente finanziato dall'IGPME (International Group for the Psychology of Mathematics Education). L'obiettivo del progetto era analizzare come la discussione matematica, basata sul confronto di diverse strategie risolutive di uno stesso problema, si sviluppi con il supporto di Padlet. In particolare, si è indagato come Padlet favorisca l'interazione e la partecipazione degli studenti, sia attraverso l'attività online (anonima e collaborativa) sia nella discussione finale in classe. A partire dall'esperienza di questo progetto internazionale, si intendono condividere buone pratiche (alla DIGiMATH) per supportare docenti scolastici e universitari nell'orchestrare discussioni matematiche mediate dalla tecnologia nelle attività di problem solving.

Padlet (https://padlet.com/) è una piattaforma che consente la creazione di bacheche virtuali su cui è possibile postare testi, immagini, link e altri contenuti multimediali. Il docente può crearlo e condividerlo con gli studenti, mediante link o QR code associato. Gli studenti possono aggiungere contenuti in modo intuitivo, anche in forma anonima o con nickname. Pur non essendo stato ideato specificamente per promuovere discussioni matematiche di classe, il suo utilizzo si è rivelato estremamente efficace per stimolare il confronto tra studenti in attività di problem-solving matematico.

Il quadro teorico di riferimento per il presente studio si rifà al modello pedagogico delle *cinque pratiche chiave* per facilitare la discussione matematica (Stein et al., 2008). Tale modello mira a supportare gli insegnanti nella progettazione, strutturazione e orchestrazioe della discussione matematica. Le cinque pratiche sono le seguenti: *1. Anticipare* le risposte degli studenti consiste nell'immaginare come questi ultimi potrebbero affrontare i compiti o i problemi: ad esempio, anticipare come gli studenti potrebbero interpretare matematicamente un problema o l'insieme delle strategie che potrebbero utilizzare. *2. Monitorare* le risposte degli studenti significa concentrarsi sui processi matematici che emergono quando questi affrontano i compiti. È quindi importante che l'insegnante chieda agli studenti di riportare nelle loro risposte una descrizione dettagliata del ragionamento che ha permesso loro di giungere a una risposta specifica. *3. Selezionare* le risposte degli studenti ha l'obiettivo di condividere, illustrare, evidenziare e poi generalizzare idee matematiche e discuterle con l'intera classe. *4. Ordinare* le selezioni delle risposte considerate precedentemente significa scegliere l'ordine con cui presentarle; ad esempio, considerare la strategia utilizzata dalla maggior parte degli studenti o quelle utilizzate da alcuni di loro, iniziando con una strategia particolarmente facile da comprendere, oppure iniziando con strategie basate su idee sbagliate o errori comuni; e così via. Gli insegnanti potrebbero scegliere di attivare questa pratica prima o durante la discussione. *5. Stabilire connessioni*, infine, implica che gli insegnanti dovrebbero aiutare gli studenti a riflettere sulle strategie e le rappresentazioni che hanno utilizzato e su come sono collegate.

La Tabella 1 offre un possibile modello di struttura che funga da riferimento per gli insegnanti, al fine di progettare attività di discussione matematica con l'utilizzo di Padlet. Questa struttura è stata sperimentata sia con studenti di scuola secondaria di II grado, sia con studenti universitari (futuri insegnanti di Corsi di Laurea in Matematica e Corsi di Laurea in Scienze della Formazione Primaria), sia con corsisti dei Percorsi Formativi abilitanti da 30-60 CFU. La numerosità delle classi a cui tale attività è stata proposta si è aggirata mediamente intorno alle 30 unità.

Tabella 1: Struttura discussione matematica orchestrata con Padlet

Fase	Tempo necessario	Lezione
1 - L'insegnante propone il problema nel Padlet	5 minuti	
2 - Raccolta delle ipotesi e delle strategie dei gruppi per la soluzione del problema nel Padlet (visibile solo all'insegnante e invisibile agli studenti)	30-40 minuti	Lezione 1
3 - L'insegnante rende visibili tutte le ipotesi e chiede di commentare i post degli altri studenti	30-40 minuti	
4 - Discussione finale in classe a partire dal Padlet	1 ora	Lezione 2

La struttura che proponiamo in questo contributo si basa su due lezioni, la prima dedicata alla raccolta di soluzioni e commenti, e la seconda dedicata alla discussione. Questa separazione tra le Fasi 1-2-3 e la Fase 4 offre agli insegnanti il tempo di leggere e analizzare le soluzioni e i commenti di tutti gli studenti, identificare sequenze e indizi specifici da confrontare e proporre un'organizzazione spaziale delle soluzioni prima dell'inizio della discussione. Ciononostante, l'intera attività potrebbe anche essere proposta nella stessa giornata. In questo caso, si è osservato che gli studenti ricordano meglio la propria soluzione e quella proposta dai compagni. La prima lezione si svolge come segue:

- Fase 1: L'insegnante pone il problema a gruppi di studenti (è possibile aprire il Padlet su una lavagna interattiva o con un proiettore a parete). In alternativa, gli studenti possono leggere direttamente sui loro dispositivi. In questa prima fase, l'insegnante deve chiarire agli studenti che, nel risolvere il problema, dovranno descrivere dettagliatamente la loro strategia e il ragionamento in post sul Padlet. Il ragionamento deve essere chiaro agli altri compagni, che dovranno commentarlo. Il docente deve chiarire che l'obiettivo dell'attività è riflettere sul processo di risoluzione, non solo sulla correttezza della risposta. Inoltre, il problema va presentato senza suggerire la strategia migliore o un'unica soluzione corretta, parlando sempre di “strategie” al plurale. Si specifica, infatti, che per favorire una discussione matematica efficace, è fondamentale proporre problemi aperti, privi di soluzioni procedurali immediate e risolvibili con strategie diverse oppure problemi che prevedano più soluzioni o nessuna. Tali compiti devono richiedere spiegazioni o argomentazioni, non solo risultati numerici. Anche fornire direttamente la soluzione può stimolare la riflessione, chiedendo agli studenti di giustificarla. L'uso di strumenti digitali come Padlet amplia le possibilità, permettendo l'inserimento di contenuti visivi e interattivi.

- Fase 2: Nel raccogliere le ipotesi di ogni gruppo nel Padlet, è necessario impostare un Padlet con commenti e reazioni bloccati e la modalità "richiedi approvazione" (in modo che gli studenti non vedano i post dei pari ma solo i propri). Si precisa che i post vengono pubblicati in forma anonima (ogni gruppo sceglie un nickname). L'anonimato è importante perché consente di concentrarsi sui contenuti delle risposte, evitando pregiudizi legati all'identità degli autori; per questo può essere utile non rivelare i nickname neanche durante la discussione.
- Fase 3: L'insegnante rende visibili i post e chiede agli studenti di commentare, sul Padlet, i post di altri gruppi.

La seconda lezione si concentra sulla discussione matematica.

- Fase 4: La discussione finale inizia con la visualizzazione dei post e dei commenti su Padlet; l'insegnante condivide il Padlet sulla lavagna e gli studenti possono visualizzarlo utilizzando i propri dispositivi. L'anonimato può perdurare per tutta la discussione. L'obiettivo principale è che l'insegnante supporti la discussione in classe in relazione agli obiettivi didattici dell'attività e del problema.

Le sperimentazioni condotte hanno evidenziato che Padlet è uno strumento efficace per sostenere la discussione matematica in classe, facilitando l'organizzazione e il confronto delle soluzioni. Permette di visualizzare diverse strategie, riducendo il carico cognitivo e favorendo la comprensione dei concetti. Offre a tutti gli studenti l'opportunità di partecipare, anche in modo non verbale, valorizzando diversi stili di apprendimento. Inoltre, aiuta l'insegnante a pianificare meglio l'intervento didattico e a promuovere una visione costruttiva dell'errore.

Bibliografia

- Giberti, C., Arzarello, F., Beltramino, S., & Bolondi, G. (2024). Mathematical discussion in classrooms as a technologically-supported activity fostering participation and inclusion. *Educational Studies in Mathematics*, *118*(2), 201–228. https://doi.org/10.1007/s10649-024-10356-y
- Pirie, S. E. B., & Schwarzenberger, R. L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 459–470. https://doi.org/10.1007/BF00578694
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning*, *10*(4), 313-340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Collaborative Online International Learning per l'apprendimento della matematica: algebra lineare per l'economia, la finanza, la sicurezza e la difesa

Alice Barana[1], Giulia Boetti[1], Marina Marchisio Conte[1], Adamaria Perrotta[2], Matteo Sacchet[1]
[1] Dipartimento di Biotecnologie Molecolari e Scienze per la Salute, Università degli Studi di Torino, Italia
[2] School of Mathematics and Statistics, University College Dublin, Irlanda
alice.barana@unito.it

L'internazionalizzazione della didattica universitaria costituisce un impegno diffuso e deliberato per incorporare prospettive internazionali, interculturali e globali all'interno degli obiettivi didattici e dell'offerta formativa (Knight, 2008), favorendo l'interazione tra culture e punti di vista differenti (Vahed & Rodriguez, 2021) e migliorando la qualità dell'istruzione, con un conseguente impatto positivo sulla società (de Wit & Hunter, 2015). Nonostante l'internazionalizzazione sia inserita nei piani strategici di tutte le università, la percentuale di studenti in Europa e negli Stati Uniti che partecipano ad attività di internazionalizzazione viaggia tra il 10% ed il 13% (European Commission, 2020; Institute for International Education, 2023). La limitata partecipazione alle mobilità ha spinto le università a cercare nuove strategie basate su modalità di apprendimento online o miste. Una di queste è il Collaborative Online International Learning (COIL) (Hackett et al., 2023; Hackett et al., 2024), progetti collaborativi tra due o più istituzioni da svolgersi interamente in ambienti online, che contribuiscono a rendere l'internazionalizzazione più inclusiva e sostenibile (Shields, 2019). Il COIL può contribuire a migliorare l'apprendimento della matematica (Hilario Perez & Verdejo Gimeno, 2022), in quanto propone approcci e metodologie di insegnamento centrati sullo studente, basati su problemi, sfide e collaborazione.

In questo contributo, viene presentata la progettazione e l'implementazione di un progetto COIL per comprendere alcune applicazioni dell'Algebra Lineare nei settori dell'Economia, della Finanza, della Sicurezza e della Difesa, co-progettato e co-erogato su base pilota nel novembre 2024 dall'University College Dublin (UCD) e dall'Università di Torino (UNITO) secondo le linee guida del Learning Design Framework elaborato nell'ambito del progetto Erasmus+ INVITE (Barana et al., 2025), basato sui principi del modello didattico ADDIE (Analysis, Design, Development, Implementation, and Evaluation), adattati per la progettazione di attività di collaborazione internazionale.

Il progetto, della durata di 10 ore extracurricolari, ha visto la partecipazione di 32 studenti del primo anno: 20 frequentanti i corsi di laurea in Economia e Finanza e in Studi Finanziari e Attuariali presso UCD e 12 frequentanti il corso di laurea in Scienze Strategiche e della Sicurezza presso UNITO. Le attività e i materiali didattici progettati sono immersi in uno scenario: gli/le studenti sono stati divisi in team di "agenti segreti" che devono scambiare informazioni preziose tra l'Irlanda e l'Italia per progettare politiche e strategie economiche all'avanguardia. I team hanno tre task da risolvere in gruppo in un mese e consegnare all'interno di un ambiente digitale di apprendimento. Il Task 0 è un'attività ice-breaking: i team devono scegliere il nome del gruppo e la sede segreta, creare il logo, presentare i ruoli dei membri e la missione del gruppo per favorire l'interazione iniziale e la socializzazione tra i partecipanti delle due istituzioni prima dei task disciplinari. Il Task 1 riguarda l'uso della crittografia nel campo della sicurezza e della difesa. Il Task 2 presenta un problema di politica macroeconomica in cui i team devono esplorare un modello macroeconomico reale, analizzare i parametri globali, interpretare i risultati e giustificare le scelte politiche del governo. Ogni team ha lavorato in modo indipendente, auto-organizzando i tempi di incontro e i metodi per risolvere i task. Inoltre, i team hanno scelto autonomamente gli strumenti digitali per il lavoro collaborativo e per il calcolo e sono stati incoraggiati a utilizzare in modo critico gli strumenti di IA per la risoluzione dei problemi e la presentazione. Gli/le studenti hanno partecipato attivamente e con soddisfazione dimostrando interesse, coinvolgimento, spirito di collaborazione e apprezzando le modalità didattiche.

Bibliografia

- Barana, A., Chatzea, V. E., Henao, K., Hildebrandt, A. M., Marchisio Conte, M., Samoilovich, D., Triantafyllidis, G., & Vidakis, N.(2025). Designing an online training module to develop virtual and blended international modalities in higher education. In I. Arnedillo-Sánchez, P. Kommers, T. Issa, P. Isaías, & L. Rodrigues (Eds.), *Proceedings of the International Conferences on Mobile Learning 2025 and Educational Technologies 2025* (pp. 117–124). IADIS Press.
- De Wit, H., & Hunter, F. (2015). The Future of Internationalization of Higher Education in Europe. *International Higher Education*, *83*, 2-3.
- European Commission. (2020). *The European Higher Education Area in 2020: Bologna Process Implementation Report*. Publications Office of the European Union. https://doi.org/10.2797/851121
- Institute for International Education (IIE). (2023). *Open Doors 2023 Report*. https://opendoorsdata.org/fast_facts/fast-facts-2023/
- Hackett, S., Janssen, J., Beach, P., Perreault, M., Beelen, J., & Van Tartwijk, J. (2023). The effectiveness of Collaborative Online International Learning (COIL) on intercultural competence development in higher education. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, *20*, 5. https://doi.org/10.1186/s41239-022-00373-3
- Hackett, S., Dawson, M., Janssen, J., & Van Tartwijk, J., (2024). Defining Collaborative Online International Learning (COIL) and distinguishing it from Virtual Exchange. *TechTrends*, *68*(6), 1078–1094. https://doi.org/10.1007/s11528-024-01000-w
- Hilario Pérez, L., & Verdejo Gimeno, P. (2022). La Arquitectura sostenible desde un punto de vista matemático a través de la geometría fractal bajo un proyecto COIL. In F. J. Garrigós-Simón, S. Estellés Miguel, J. O. Montesa, & Y. Narangajavana (Eds.), *Proceedings of International Conference on Innovation, Documentation and Education* (pp. 527-535). Editorial Universitat Politècnica de València. http://dx.doi.org/10.4995/INN2021.2021.13407
- Knight, J., (2008). *Higher Education in Turmoil: The Changing World of Internationalization*. Rotterdam Taipei: Sense Publishers.
- Shields, R. (2019). The sustainability of international higher education: Student mobility and global climate change. *Journal of Cleaner Production*, *217*, 594–602. https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.01.291
- Vahed, A. & Rodriguez, K., (2021). Enriching students' engaged learning experiences through the collaborative online international learning project. *Innovations in Education and Teaching International*, *58*(5), 596-605. https://doi.org/10.1080/14703297.2020.1792331

Discussione Matematica Digitale: una metodologia didattica per sostenere processi collaborativi asincroni in matematica

Sara Gagliani Caputo[1], Annalisa Cusi[2], Laura Branchetti[1]
[1] Università degli Studi di Milano
[2] Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
sara.gagliani@unimi.it

L'integrazione delle tecnologie digitali nei contesti educativi rappresenta un'opportunità significativa per trasformare l'insegnamento-apprendimento della matematica, in particolare promuovendo forme di collaborazione e comunicazione che superano i confini tradizionali dell'aula (Ball & Barzel, 2018). Questo tema di ricerca ha ricevuto un impulso durante la pandemia da Covid-19. Tuttavia, il passaggio forzato alla didattica a distanza durante il periodo pandemico ha spesso ostacolato la creazione di ambienti partecipativi, portando a pratiche prevalentemente trasmissive (Aldon et al., 2021). È emersa così, come sfida rilevante, l'esigenza di esplorare e sfruttare il potenziale del digitale per stimolare collaborazione e comunicazione tra studenti e con l'insegnante. In questa ricerca, affrontiamo tale sfida focalizzandoci sul ruolo delle tecnologie digitali nel contesto della discussione matematica. La discussione matematica, infatti, è una metodologia didattica che mira a coinvolgere attivamente gli studenti nella costruzione della conoscenza matematica, attraverso l'interazione con i pari e con l'insegnante (Bartolini Bussi et al., 1995).

In tale direzione si colloca la progettazione e sperimentazione della Discussione Matematica Digitale (DMD) (Gagliani Caputo et al., 2025), una metodologia didattica articolata in tre fasi: 1) problem solving asincrono in piccoli gruppi, svolto attraverso chat di piattaforme di messaggistica istantanea; 2) discussione di classe asincrona su Padlet (https://padlet.com/), guidata dall'insegnante a partire da estratti selezionati delle soluzioni dei gruppi; 3) discussione di classe sincrona in presenza, finalizzata ad approfondire gli aspetti salienti emersi durante le fasi asincrone. La progettazione della DMD si fonda su due riferimenti principali legati alla discussione matematica: la metodologia FaSMEd per la discussione di bilancio (Cusi et al., 2017), dalla quale adottiamo le pratiche di selezione e raggruppamento di estratti significativi delle soluzioni dei gruppi per stimolare il confronto e processi metacognitivi; e il modello di comportamenti ed atteggiamenti consapevoli ed efficaci dell'insegnante nell'orchestrazione di discussioni (Cusi & Malara, 2013), che fornisce un riferimento sia per la progettazione iniziale della discussione sia per gli interventi dell'insegnante durante lo svolgimento della discussione. Per quanto riguarda le radici della DMD nella discussione asincrona, i principi guida della progettazione riguardano: l'asincronicità, che consente ai partecipanti di affrontare le discussioni secondo i propri tempi, permettendo loro di riflettere ed elaborare le informazioni prima di contribuire (Wang, 2023); e la comunicazione scritta, che favorisce chiarezza e permanenza, aiutando i partecipanti a riflettere sui propri contributi e su quelli altrui (Garrison et al., 2000).

La DMD è stata sperimentata con studenti del corso di laurea in scienze della formazione primaria, nell'ambito di un insegnamento volto a integrare contenuti e processi matematici ad aspetti pedagogici, attraverso attività focalizzate sull'uso dell'algebra come strumento di pensiero. I dati raccolti (trascrizioni di chat e Padlet) sono stati analizzati attraverso la dimensione delle modalità sociali di co-costruzione della conoscenza (Weinberger & Fischer, 2006), che comprende il grado in cui gli studenti si confrontano con i contributi altrui e come questi vengono integrati nei processi di costruzione della conoscenza. Dall'analisi delle chat sono emerse due tipologie di dinamiche: da un lato, gruppi collaborativi che co-costruiscono strategie risolutive condividendo e integrando i processi di pensiero; dall'altro, gruppi caratterizzati da scarse interazioni, prevalentemente focalizzate su aspetti organizzativi (Cusi & Gagliani Caputo, 2024). La discussione su Padlet ha mostrato un coinvolgimento complessivamente limitato, sia in termini quantitativi che qualitativi, a causa di fattori affettivi (come il timore del giudizio dei pari) e di difficoltà legate alla struttura dell'ambiente digitale e della discussione (ad esempio, l'incertezza su "quando" e "dove" intervenire) (Gagliani Caputo et al., 2023).

In conclusione, l'esperienza della DMD mostra come una progettazione mirata di ambienti digitali per la didattica della matematica possa sostenere la collaborazione e la co-costruzione di significati matematici, estendendo l'insegnamento-apprendimento oltre i confini fisici e temporali dell'aula. Nonostante le criticità emerse, studenti e docenti hanno valutato positivamente l'esperienza, apprezzando in particolare la possibilità di riflettere prima di intervenire e di rendere visibile il pensiero attraverso la scrittura.

Bibliografia

- Aldon, G., Cusi, A., Schacht, F., & Swidan, O. (2021). Teaching Mathematics in a Context of Lockdown: A Study Focused on Teachers' Praxeologies. *Education Sciences*, *11*(2), 38. https://doi.org/10.3390/educsci11020038
- Ball, L., & Barzel, B. (2018). Communication When Learning and Teaching Mathematics with Technology. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H. Siller, M. Tabach, & C. Vale (Eds.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education: Tools, Topics and Trends* (pp. 227-243). Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_12
- Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica.* Centro Documentazione Educativa. Comune di Modena, settore istruzione.
- Cusi, A., & Gagliani Caputo, S. (2024). Design of digital environments aimed at fostering asynchronous working group activities: emerging categories of students' collaborative processes. In D. Diamantidis, M. Karavakou, M. Grizioti, & C. Kynigos (Eds.), *Proceedings of the 16th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT16)* (pp. 273-280). National and Kapodistrian University of Athens.
- Cusi, A., & Malara, N. (2013). A theoretical construct to analyze the teacher's role during introductory activities to algebraic modelling. In B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 3015-3024). Middle East Technical University and ERME.
- Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. *ZDM Mathematics Education*, *49*(5), 755-767. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0878-0
- Gagliani Caputo, S., Cusi, A., & Branchetti, L. (2023). Design of asynchronous mathematical discussions on Padlet: analysis of students' social modes and teacher's roles. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmer, K. Gosztonyi & E. Konya (Eds.), *Proceedings of the 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 2662-2669). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.
- Gagliani Caputo, S., Branchetti, L., & Cusi, A. (2025). Intertwining students' social modes of co-construction and epistemic aspects of algebraic thinking in asynchronous mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*,*120*, 109-135. https:

//doi.org/10.1007/s10649-025-10395-z

- Garrison, D. R., Anderson, T., & Archer, W. (2000). Critical inquiry in a text-based environment: Computer conferencing in higher education. *Internet and Higher Education*, *2*(2-3), 87-105.
- Wang, Y. (2023). *Online discussion in secondary and higher education. A complete guide to building a dynamic online discourse community*. Springer.
- Weinberger, A., & Fischer, F. (2006). A framework to analyze argumentative knowledge construction in computer-supported collaborative learning. *Computers & Education*, *46*, 71-95. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2005.04.003

L'Intelligenza Artificiale Generativa come scaffolding dinamico nell'insegnamento-apprendimento della matematica: studi esplorativi e prospettive didattiche

Roberto Capone[1], Eleonora Faggiano[1], Francesca Massaro[1], Federica Troilo[1,2]
[1] Università degli Studi di Bari Aldo Moro
[2] Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
roberto.capone@uniba.it

L'Intelligenza Artificiale Generativa (GenAI) sta emergendo come una forza trasformativa nel campo dell'educazione, con un potenziale significativo per ridefinire le modalità di apprendimento e insegnamento. In particolare, nel contesto della matematica universitaria, GenAI offre opportunità inedite per personalizzare il supporto didattico e favorire una comprensione più profonda dei concetti complessi. A partire dall'inizio del 2024, abbiamo condotto studi esplorativi sull'applicazione di GenAI come strumento di supporto dinamico, analizzando le interazioni tra studenti (simulati) e sistemi GenAI.

Il quadro teorico utilizzato si basa sul concetto di scaffolding (Wood, Bruner, & Ross, 1976), inteso come il supporto temporaneo fornito agli studenti per aiutarli a raggiungere compiti che altrimenti sarebbero troppo difficili da completare da soli. Questo supporto viene gradualmente ridotto man mano che gli studenti acquisiscono competenza e autonomia.

Gli studi si sono concentrati sull'esplorazione di come GenAI possa essere impiegata per supportare gli studenti nel loro percorso di apprendimento matematico. Adottando il modello dell'apprendistato cognitivo (Collins, Brown, & Newman, 1987), abbiamo analizzato come GenAI possa incarnare i sei processi chiave:

> Modelling: fornire esempi chiari e spiegazioni dettagliate dei concetti matematici, fungendo da modello di pensiero esperto;
>
> Coaching: offrire feedback personalizzato e guida basata sui progressi dello studente, intervenendo quando necessario;
>
> Scaffolding: adattare dinamicamente il livello di supporto in base alle esigenze individuali, fornendo suggerimenti contestualizzati e spiegazioni passo-passo;
>
> Articulation: incoraggiare gli studenti a esprimere il loro ragionamento e a giustificare le loro risposte, promuovendo la consapevolezza metacognitiva;
>
> Reflection: spingere gli studenti a confrontare il loro pensiero con le soluzioni esperte e a riflettere sui loro errori, favorendo l'apprendimento dai propri errori;
>
> Exploration: incoraggiare gli studenti a esplorare autonomamente nuovi problemi e applicazioni, promuovendo l'indipendenza e la scoperta.

Attraverso simulazioni di interazioni studente-GenAI, abbiamo esaminato la capacità di questi sistemi di fornire feedback personalizzati, generare esempi e esercizi adattivi, stimolare la riflessione e l'articolazione del pensiero matematico, e promuovere l'esplorazione autonoma.

Le domande di ricerca che hanno guidato il nostro studio intendevamo indagare:

> RQ1) In che modo i docenti universitari possono analizzare il potenziale di GenAI per supportare l'apprendimento matematico degli studenti?

> RQ2) Come si potrebbe interpretare questo potenziale considerando le sei fasi che caratterizzano l'apprendistato cognitivo?

Per rispondere a queste domande, è stata sviluppata una prima ricerca interpretativa, basata su un caso studio: tre docenti di matematica hanno discusso su come utilizzare GenAI come supporto per un corso di matematica di base, analizzando aspetti positivi e limiti. Uno di loro ha tenuto un corso di analisi per ingegneria meccanica e ha deciso di testare il potenziale di GenAI. Ha scelto uno degli argomenti che gli studenti di solito trovavano più difficili: gli integrali tripli e, in particolare, i cambiamenti delle variabili. Ha videoregistrato una lezione sull'argomento e l'ha caricata sul web (https://vimeo.com/215533102). Quindi, ha utilizzato freesubtitles.ai per generare automaticamente i sottotitoli del video e ha caricato l'intero testo in un sistema di GenAI. Infine, ha sviluppato una conversazione con GenAI per capire come potesse supportare l'apprendimento degli studenti e il suo insegnamento. Questa conversazione è stata la base per la discussione con gli altri docenti (che è stata registrata e trascritta).

La conversazione tra il docente e il sistema GenAI e la successiva discussione con gli altri docenti sono state oggetto di analisi e riflessione alla luce del quadro di riferimento teorico. In particolare, l'analisi del potenziale di GenAI come strumento di scaffolding dinamico è stata svolta con riferimento alle sei fasi dell'apprendistato cognitivo. La tabella in Figura 1 evidenzia alcuni degli aspetti più interessanti.

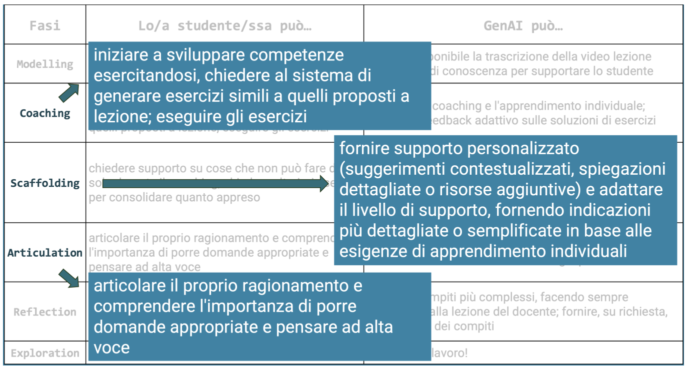


Figura 1: Potenziale di GenAI in relazione alle fasi dell'apprendistato cognitivo

In un secondo studio pilota due ricercatrici hanno simulato l'interazione di uno studente con GenAI (in questo caso ChatGPT) come supporto per un corso di matematica di base (LT Scienze Biologiche), analizzandone aspetti positivi e limiti. L'argomento scelto, la continuità delle funzioni, è uno degli argomenti più impegnativi per gli studenti, che spesso richiede un'ampia giustificazione e ulteriori spiegazioni per garantire la comprensione. Le domande poste a GenAI durante la simulazione si basavano sulla letteratura esistente e su precedenti sperimentazioni che miravano a indagare le misconcezioni e le difficoltà comuni degli studenti sulla continuità di una funzione.

Al fine di analizzare a fondo la discussione con GenAI in relazione alle sei fasi che caratterizzano l'apprendimento in apprendistato, abbiamo sviluppato e identificato una serie di criteri di categorizzazione progettati per mappare sistematicamente i diversi aspetti dell'interazione. La tabella in Figura 2 sintetizza i criteri di identificazione utilizzati nell'analisi della conversazione (simulata) tra studente e GenAI.

Fasi	Descrizione	Criteri di identificazione per l'analisi
Modelling	L'esperto mostra il comportamento o descrive il concetto desiderato	Definizioni chiare, spiegazioni dei concetti e degli aspetti chiave
Coaching	L'esperto fornisce supporto e feedback personalizzati in base ai progressi dello studente	Feedback adattivo sulle soluzioni degli esercizi
Scaffolding	Supporto temporaneo che aiuta lo studente a completare compiti difficili, e che si riduce gradualmente man mano che la competenza cresce	Suddivisione di problemi complessi in passaggi più semplice; suggerimenti specifici per il contesto basati su requisiti particolari; guida progressiva che diminuisce man mano che lo studente acquisisce autonomia
Articulation	Lo studente è incoraggiato a spiegare e articolare il proprio pensiero	Domande che spingono lo studente a spiegare il suo ragionamento e a giustificare le sue risposte
Reflection	Lo studente confronta il suo ragionamento con quello dell'esperto e riflette sugli errori	Confronti tra le risposte dello studente e le soluzioni corrette, riflessione sulle scelte effettuate durante il processo
Exploration	Lo studente esplora in modo indipendente, risolvendo problemi e scoprendo nuove applicazioni del concetto appreso	Problemi complessi o più difficili, supporto decrescente per stimolare l'indipendenza e l'esplorazione auto-diretta

Figura 2: Criteri per mappare l'interazione con GenAI

I risultati preliminari di questi studi preliminari indicano che GenAI possiede un notevole potenziale come strumento di scaffolding dinamico (Bernardi et al, in printing; Capone & Faggiano, accepted). La sua capacità di adattarsi alle esigenze individuali degli studenti, di fornire spiegazioni contestualizzate e di proporre attività di difficoltà crescente suggerisce che GenAI può contribuire a creare un ambiente di apprendimento più inclusivo ed efficace. Tuttavia, emergono anche sfide e interrogativi, in particolare riguardo alla capacità di GenAI di supportare pienamente l'esplorazione autonoma e di adattare dinamicamente il livello di supporto in base alla progressione dello studente.

Le nostre ricerche esplorative sottolineano l'importanza di continuare a investigare il ruolo di GenAI nell'educazione matematica. Comprendere appieno il suo potenziale come strumento di scaffolding dinamico richiede ulteriori sperimentazioni con studenti reali e un'analisi approfondita delle interazioni e dei processi cognitivi coinvolti. Riteniamo che GenAI possa trasformare significativamente l'insegnamento e l'apprendimento della matematica, consentendo agli studenti di acquisire competenze e conoscenze in modo più personalizzato e significativo. Questa trasformazione, tuttavia, richiede una riflessione continua sulle implicazioni didattiche e la necessità di sviluppare strategie pedagogiche innovative che integrino efficacemente GenAI nell'esperienza di apprendimento.

Bibliografia

- Bernardi M.L., Troilo F., Capone R, & Faggiano E. (in press). Investigating the potential of GenAI as a scaffolding tool in Mathematics Education. In *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME14*.
- Capone, R., & Faggiano, E. (accepted). Generative Artificial Intelligence Scaffolding Students' Understanding of Triple Integrals. In *Pre-Proceedings of the 15th International Congress on Mathematics Education.*
- Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1987). Cognitive apprenticeship: Teaching the craft of reading, writing. *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser*, 453–494.
- Wood, D., Bruner, J. & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *The Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *17*, 89–100.

Sono un matematico, Jim, non uno zoologo!
Uno studio esplorativo sull'uso delle LLM come costruttrici di mondi per problemi di realtà per studenti universitari dei corsi di servizio

Ottavio G. Rizzo[1], Sara Vergallo[2]
[1] Università degli Studi di Milano
[2] Università degli Studi di Macerata
Ottavio.Rizzo@unimi.it

La matematica fa paura. Per gli studenti di scienze della vita ancora di più e «is perceived by most of its victims as being authoritarian and not intrinsic to real life situation» (Bishop & Eley, 2001). La rottura del ciclo di auto-regolazione fra *engagement*, riflessione e anticipazione (Schunk & Zimmerman, 1998) porta gli studenti a perdere ogni interesse e comprensione del contenuto matematico (Tariq et al., 2005). D'altro canto, un modo efficace per (ri)ottenere l'*engagement* degli studenti è il lavorare su problemi (Krawitz et al., 2025) che siano rilevanti per loro, ovvero «situazioni problematiche che siano reali dal punto di vista dell'esperienza dello studente» (Gravemeijer & Doorman, 1999).

Rizzo (in stampa) definisce, in analogia con la terminologia usata per descrivere la fantascienza (Cramer, 2003), due categorie di problemi di realtà a contenuto scientifico: una in cui il contesto scientifico non è che un velo su un normale esercizio di un corso di istituzioni, e una in cui l'interpretazione matematica del problema può anche essere radicalmente diversa fra le due comunità di pratica: quella dei matematici e quella degli scienziati (Rogovchenko & Rogovchenko, 2023). Chiamiamo il primo tipo di problema, un *soft sci-problem*, e il secondo, dove «the science provides the illusion of realism, the setting should not compromise fidelity to scientific facts for didactical purposes or, if it does, this should happen in such a way that the student does not much notice» (Rizzo, 2025), un *hard sci-problem*.

Per costruire un buon *hard sci-problem* occorre combinare alla conoscenza del contenuto matematico e dei relativi aspetti pedagogici (Ball et al., 2008) la conoscenza di una disciplina scientifica: solitamente sarà necessario un gruppo interdisciplinare (King et al., 2023) ma, accettando compromessi sull'aspetto *scientifico* del problema, il percorso che può portare un docente di un corso di Istituzioni — ovvero qualcuno con una conoscenza delle scienze poco più che liceale — a creare simili contenuti è:

1. Riconoscere un esempio potenzialmente fruttifero
2. Ricercare fonti sull'esempio e trarne una comprensione sommaria
3. Scrivere un problema scientificamente sensato, matematicamente significativo e pedagogicamente opportuno

La collaborazione con un esperto nel campo può far superare il punto 3 e, supponendo che un linguaggio comune possa essere stabilito (Ju et al., 2016) anche il punto 2. Il punto 1 rimane però il più complicato: chiedergli «Mi puoi dare un esempio in cui nella tua disciplina si usa una funzione di una variabile reale che non sia troppo banale ma neanche troppo difficile perché gli studenti devono farne lo studio di funzione senza usare il computer?» difficilmente darà risposte utilizzabili.

Una LLM (*Large Language Model*) si autodefinisce come «un modello statistico del linguaggio naturale basato su reti neurali di grandi dimensioni, addestrato su vasti corpora testuali. Utilizza l'apprendimento auto-supervisionato ed è in grado di generare testi, rispondere accuratamente a domande e completare altri compiti linguistici con un'elevata precisione». (OpenAI, 2024)

Grazie a meccanismi di *self-attention* e all'architettura *Transformer* (Vaswani et al., 2017) che la rendono in grado di valutare l'importanza di diverse parole in una sequenza, catturando efficacemente dipendenze a lungo termine e relazioni contestuali (Luo et al., 2023), una LLM è in grado sia di comprendere il contesto che di fornire un ampio ventaglio di possibili risposte, permettendo di affrontare efficacemente sia il punto 1 che, grazie alla sua capacità di riassumere e semplificare un testo dato un certo livello di competenza, il punto 2.

Per assicurarci che questo approccio abbia aumentato l'*engagement* degli studenti abbiamo ritenuto fosse utile procedere sia con dei questionari che con delle interviste, ritenuti entrambi buoni strumenti per stimolare i processi di riflessione del ciclo di auto-regolazione degli studenti citato sopra; i questionari verranno somministrati durante il prossimo anno accademico mentre, ad ora, abbiamo condotto un primo round di interviste alla fine di un appello estivo, dunque non uno dei primi appelli disponibili. Le interviste sono state condotte individualmente a 8 studenti volontari. Per riassumere ciò che emerso possiamo dire che i problemi contestualizzati in ambito naturalistico sono stati molto apprezzati e sono stati definiti *utili* per affrontare gli insegnamenti successivi, sebbene più *difficili* e meno *meccanici* di questi ultimi. È emerso inoltre che gli studenti, alla fine di un insegnamento di istituzioni matematiche condotto con questa modalità, siano perfettamente consapevoli dell'importanza della matematica nel loro corso di studi e nella loro carriera futura. Ne sono consapevoli al punto da ritenersi preoccupati per il fatto di non essere in grado, autonomamente, di applicare modelli matematici a contesti reali. Abbiamo trovato questo aspetto molto interessante in quanto sia prova della loro profonda motivazione a migliorare il loro livello di matematica. Affrontare il corso di istituzioni rimane però un ostacolo per questi studenti, in particolare per coloro che non escono da un liceo scientifico, i quali affermano di aver iniziato il corso senza le basi necessarie e di non essere mai riusciti a colmare le loro lacune.

I nostri studi preliminari ci portano quindi a concludere che una LLM possa effettivamente essere usata come partner nella creazione di *hard sci-problem*, purché il docente abbia un buon livello di *Technological Pedagogical Content Knowledge* (TPACK) per interagire in modo fruttuoso con l'LLM e un buon livello di Pedagogical Content Knowledge (PCK) per riconoscere gli elementi, nella letteratura delle scienze della vita, che possano fornire problemi rilevanti per gli studenti.

Per migliorare ulteriormente l'*engagement* intendiamo implementare una *didattica differenziata* (Tomlinson, 2010) basata sulla differenziazione del lavoro per campi di interesse degli studenti (zoologia, botanica, ecologia, paleontologia). Una volta che avremo creato un sostanzioso dataset di problemi intendiamo coinvolgere i docenti di diverse discipline, chiedendo un consulto poco dispendioso, per assolvere al nostro punto 3 e garantire agli studenti la somministrazione di problemi autentici e coerenti.

Bibliografia

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554
- Bishop, R., & Eley, A. (2001). Microbiologists and maths. *Microbiology Today*, *28*(May), 62–63.
- Cramer, K. (2003). Hard science fiction. In E. James, & F. Mendlesohn (Eds.), *The Cambridge Companion to Science Fiction* (pp. 186–196). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CCOL0521816262.014

- Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1–3), 111–129. https://doi.org/10.1023/a:1003749919816
- Ju, B., Jin, T., & Stewart, J. B. (2016). Investigating communication hindrance in interdisciplinary collaboration: A grounded theory approach. *Proceedings of the Association for Information Science and Technology*, *53*(1), 1–4. https://doi.org/10.1002/pra2.2016.14505301113
- King, D., Greenwood, A., & Jennings, M. (2023). A contextualised calculus unit for science students. In T. Dreyfus, A. S. González-Martín, J. Monaghan, E. Nardi, & P. Thompson (Eds.), *The Learning and Teaching of Calculus Across Disciplines* (pp. 117–120). MatRIC.
- Krawitz, J., Schukajlow, S., & Hartmann, L. (2025). Does problem posing affect self-efficacy, task value, and performance in mathematical modelling? *Educational Studies in Mathematics*, *119*, 445-466. https://doi.org/10.1007/s10649-025-10385-1
- Luo, Q., Zeng, W., Chen, M., Peng, G., Yuan, X., & Yin, Q. (2023). Self-Attention and Transformers: Driving the Evolution of Large Language Models. *2023 IEEE 6th International Conference on Electronic Information and Communication Technology (ICEICT)* (pp. 401–405). IEEE. https://doi.org/10.1109/ICEICT57916.2023.10245906
- OpenAI. (2024). ChatGPT (GPT-4o) [Large language model]
- Rizzo, O. G. (in press). LLMs as world builders for authentic problems in calculus for STEM students. In *Proceedings of the Second Conference on the Learning and Teaching of Calculus in Other Disciplines*.
- Rogovchenko, Y., & Rogovchenko, S. (2023). Mathematics education of future biologists: A strong need for brokering between mathematics and biology communities of practice Interdisciplinary mathematics education. In T. Dreyfus, A. S. González-Martín, E. Nardi, J. Monaghan, & P. W. Thompson (Eds.), *The Learning and Teaching of Calculus Across Disciplines – Proceedings of the Second Calculus Conference* (pp. 161–165). MatRIC.
- Schunk, D. H., & Zimmerman, B. J. (1998). *Self-regulated learning: From teaching to self-reflective practice*. Guilford Press.
- Tariq, V., Stevenson, J., & Roper, T. (2005). Maths for Biosciences. *MSOR Connections*, *5*(2), 39-43.
- Tomlinson, C. A., & Imbeau, M. B. (2010). *Leading and Managing a Differentiated Classroom.* Alexandria, VA: ASCD.
- Vaswani, A., Brain, G., Shazeer, N., Parmar, N., Uszkoreit, J., Jones, L., Gomez, A. N., Kaiser, Ł., & Polosukhin, I. (2017). Attention Is All You Need. In U. von Luxburg, I. Guyon, S. Bengio, H. Wallach, & R. Fergus (Eds.), *Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems* (pp. 6000–6010). Curran Associates.

.

ChatGPT per la didattica della matematica a supporto dei futuri insegnanti

Maria Lucia Bernardi[1], Roberto Capone[1], Elisabetta Erione[1], Mario Lepore[2]
[1] Università degli studi di Bari Aldo Moro
[2] Università degli studi di Salerno
roberto.capone@uniba.it

L'inserimento delle tecnologie digitali, tra cui l'*intelligenza artificiale generativa*, nell'insegnamento della matematica rappresenta oggi una sfida significativa ma anche una grande opportunità per lo sviluppo professionale degli insegnanti (Drijvers & Sinclair, 2023). Strumenti come ChatGPT offrono il potenziale di migliorare l'insegnamento abilitando risorse di apprendimento personalizzabili, interattive e capaci di rispondere alle esigenze di contesti specifici. Tuttavia, permangono preoccupazioni legate all'affidabilità, all'accuratezza delle risposte e al rischio di un uso non critico da parte degli studenti e degli insegnanti (Bernardi et al., 2024). L'efficacia di questi strumenti dipende fortemente dalla capacità degli insegnanti di utilizzarli in modo strategico, il che richiede una *formazione mirata* e competenze specifiche.

Negli ultimi anni la letteratura ha iniziato a interrogarsi non solo sulle potenzialità di questi strumenti, ma anche sulle condizioni necessarie affinché possano essere realmente integrati nella pratica didattica in modo efficace e sostenibile. In particolare, si è posta attenzione alla necessità di modelli teorici che guidino l'uso della tecnologia, evitando approcci occasionali o puramente strumentali.

In questo quadro si inserisce la presente ricerca, che esplora il contributo che un modello *personalizzato* di ChatGPT può offrire nell'insegnamento del concetto di *continuità delle funzioni reali di variabile reale*, in un contesto di formazione iniziale dei futuri insegnanti di matematica. Lo studio si fonda sul framework *Knowledge for Teaching Mathematics with Technology* (KTMT) (Rocha, 2020), un modello che integra la conoscenza matematica, pedagogica e tecnologica dell'insegnante, evidenziando come queste dimensioni si intreccino nella progettazione di compiti didattici mediati dalla tecnologia.

Il KTMT distingue tre livelli di conoscenza dell'insegnante: i *domini di base* (matematica, insegnamento e apprendimento, tecnologia, curricolo e contesto), le *conoscenze inter-dominio* (Mathematics and Technology Knowledge - MTK, Teaching and Learning and Technology Knowledge - TLTK), e la *conoscenza integrata* (IK), che riflette la capacità di combinare tali elementi in modo coerente nella pratica didattica.

Nell'ambito della presente indagine, l'analisi si concentra su tre dimensioni operative fondamentali derivate dal KTMT:

1. la tipologia dei compiti e il ruolo della tecnologia nella loro strutturazione;
2. l'uso e la transizione tra diverse rappresentazioni matematiche (algebriche, grafiche, numeriche, testuali);
3. l'equilibrio tra attività esplorative supportate dalla tecnologia e pratiche di giustificazione rigorosa.

L'obiettivo è comprendere se e come un modello di ChatGPT progettato ad hoc possa facilitare queste tre dimensioni, rispetto alla versione standard. A partire da questa esigenza, sono state formulate le seguenti domande di ricerca:

RQ1) L'uso di un modello di ChatGPT personalizzato sulla continuità offre benefici concreti per l'insegnamento rispetto alla versione standard?

RQ2) Come si manifestano e si trasformano le tre dimensioni del KTMT durante l'uso del modello personalizzato?

Metodologia

La sperimentazione ha coinvolto 15 futuri insegnanti di matematica, selezionati per il loro interesse verso pratiche didattiche innovative ma con esperienza limitata nell'uso di ChatGPT (Bernardi et al., 2025). La ricerca ha adottato un approccio qualitativo ed esplorativo, articolato in tre fasi:

1. uso libero della versione standard di ChatGPT, senza istruzioni specifiche, con l'obiettivo di osservare le modalità di interazione spontanea e la tipologia di risorse generate;
2. utilizzo di una versione personalizzata, istruita con contenuti teorici e pratici sul concetto di continuità delle funzioni reali, progettata per fornire risposte coerenti con obiettivi pedagogici specifici e integrare spiegazioni, esempi, esercizi graduati e riferimenti a contesti reali;
3. sessioni di riflessione strutturata e interviste semi-strutturate per raccogliere percezioni e valutazioni sull'efficacia dello strumento e sulle possibilità di integrazione nella pratica didattica.

La fase di personalizzazione ha previsto la definizione di obiettivi didattici chiari: supportare la comprensione del concetto di continuità, promuovere l'uso integrato di rappresentazioni multiple e favorire un equilibrio tra esplorazione empirica e giustificazione formale. Per raggiungere tali obiettivi è stato predisposto un dataset tematico contenente definizioni formali e spiegazioni accessibili sui diversi tipi di discontinuità, esempi risolti passo-passo con livelli di difficoltà graduati, esercizi ispirati a contesti reali in ambito scientifico ed economico e indicazioni metodologiche per facilitare la transizione tra rappresentazioni algebriche, grafiche, tabellari e verbali. Il modello è stato inoltre arricchito con suggerimenti per la progettazione di attività che collegassero l'osservazione empirica alla formalizzazione matematica, incoraggiando una progressiva costruzione del rigore dimostrativo.

Il sistema è stato ottimizzato per adattare automaticamente il linguaggio e la profondità delle risposte alle competenze dell'utente, fornendo spiegazioni introduttive per i principianti e approfondimenti rigorosi per gli utenti più esperti. L'interazione è stata progettata per essere *conversazionale* e stimolante, includendo collegamenti con applicazioni concrete della continuità e suggerendo spunti per attività didattiche innovative. Il ChatGPT personalizzato utilizzato nello studio è accessibile al seguente indirizzo: https://chatgpt.com/g/g6759b2b8242c8191b8243f3fba7099d6-continuita-funzioni-reali-gpt

Risultati

Nella prima fase, i partecipanti hanno evidenziato difficoltà nell'uso del sistema senza formazione preventiva e timori relativi alla perdita di centralità dell'insegnante come mediatore del processo di apprendimento. Con l'introduzione del modello personalizzato, il sistema è stato percepito come uno *strumento utile* per progettare lezioni più articolate e differenziate.

Relativamente alla **dimensione 1**, la versione personalizzata ha permesso di proporre attività varie con complessità crescente, calibrate sui livelli cognitivi degli studenti, comprese attività esplorative ancorate a contesti reali (es. fenomeni naturali o economici).

Per la **dimensione 2**, la chatbot ha favorito l'uso integrato di rappresentazioni algebriche, grafiche, tabellari e testuali dello stesso concetto, promuovendo collegamenti e confronti fra esse e sviluppando una comprensione più profonda della continuità.

La **dimensione 3** ha mostrato come il sistema possa sostenere percorsi che partono dall'osservazione empirica per arrivare alla giustificazione formale basata su definizioni e teoremi, evitando un uso puramente descrittivo della tecnologia.

In sintesi, i risultati confermano che:

- rispetto alla versione standard, il modello personalizzato ha prodotto benefici concreti nella progettazione e diversificazione delle attività didattiche (RQ1);
- le tre dimensioni operative del KTMT sono state pienamente attivate e rafforzate durante l'uso del modello personalizzato, mostrando un miglioramento nella qualità delle attività proposte e nella gestione delle rappresentazioni e della giustificazione matematica (RQ2).

Conclusioni

Lo studio dimostra che un modello di ChatGPT personalizzato, integrato nella pratica didattica attraverso il KTMT, può diventare un valido alleato per la progettazione di attività significative, l'uso bilanciato di rappresentazioni multiple e l'integrazione tra esplorazione e rigore matematico. Rimane fondamentale la formazione mirata dei docenti per sviluppare competenze critiche nell'uso dell'IA.

Futuri sviluppi includono il perfezionamento del modello, l'ampliamento del campione e l'integrazione di metodi quantitativi per una valutazione più completa dell'impatto.

Bibliografia

- Bernardi, M. L., Capone, R., Faggiano, E., & Rocha, H. (2024). Exploring Pre-service Mathematics Teachers' Perceptions of Generative AI in Mathematics Education: A Pilot Study. In *Book of Abstracts of the 2nd International Conference on Math Education and Technology (ICMET 2024)* (pp. 90-91).
- Bernardi, M., Capone, R., & Lepore, M. (2025). Empowering Mathematics Educators: Integrating ChatGPT as a Tool for Innovative Teaching Practices. In B. Dubulay, T. Di Mascio, E. Tovar, & C. Meinel (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference on Computer Supported Education - Volume 2: CSEDU* (pp. 404-411). SciTePress.
- Capone, R., & Faggiano E. (to appear). Generative artificial intelligence scaffolding students' understanding of triple integrals. In *Proceedings of the 15th International Congress on Mathematical Education*.
- Drijvers, P., & Sinclair, N. (2023). The role of digital technologies in mathematics education: purposes and perspectives. *ZDM*, *56*, 239-248. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01535-x
- Rocha, H. (2020). Using tasks to develop pre-service teachers' knowledge for teaching mathematics with digital technology. *ZDM*, *52*, 1381–1396. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01195-1

EXAM.net come strumento versatile per la valutazione delle competenze matematiche nel corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria

Annarosa Serpe
Università della Calabria, Dipartimento di Matematica e Informatica
`annarosa.serpe@unical.it`

A livello universitario, l'adozione di tecnologie come *EXAM.net* (piattaforma digitale per la gestione di esami e verifiche) ha portato a numerose buone pratiche che dimostrano come l'integrazione digitale possa supportare sia docenti che studenti.

L'Università della Calabria, durante il periodo pandemico COVID-19, ha sperimentato l'utilizzo di questa piattaforma per somministrare esami al fine di consentire una gestione più sicura e automatizzata delle prove, riducendo i tempi di correzione e aumentando l'affidabilità dei risultati. Superata l'emergenza pandemica, molti docenti hanno abbandonato l'uso di questa piattaforma ripristinando le tradizionali modalità di esame, mentre nel dipartimento di Matematica e Informatica si continua tuttora ad utilizzarla. Il perché della scelta trova ragione nelle potenzialità pedagogiche e didattiche della piattaforma che contribuisce a trasformare i processi di insegnamento e valutazione. Infatti, *EXAM.net* (Fig.1) https://exam.net/it/ rappresenta uno strumento digitale innovativo che offre una serie di strumenti interattivi e risorse che possono migliorare significativamente l'esperienza di insegnamento e apprendimento.

La piattaforma consente di creare differenti tipologie di prove, come test a risposta multipla, esercizi aperti e domande a sviluppo, tutto in modo digitale, favorendo un approccio più flessibile e inclusivo; permette agli studenti di ricevere feedback immediato sui loro esercizi, favorendo un processo di auto-valutazione e di miglioramento continuo.

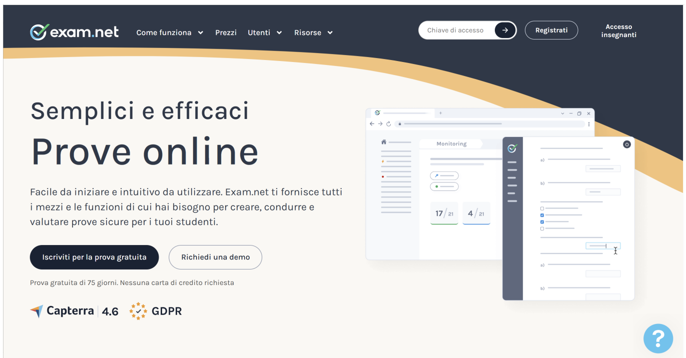


Figura 1: Interfaccia utente (UI).

Tra le buone pratiche che si possono progettare con l'uso di *EXAM.net* si segnalano:

1. Creazione di esercizi differenziati e personalizzati (test con domande di diversa difficoltà e tipologia, adattando le prove alle esigenze di ogni studente). Questo permette di offrire sfide adeguate e di favorire il successo di tutti, stimolando la motivazione e l'autonomia (Tomlinson, 2014).
2. Uso di domande a risposta aperta e problem-solving (inserimento di esercizi che richiedono agli studenti di elaborare soluzioni proprie, favorendo il pensiero critico e la capacità di applicare le conoscenze matematiche in contesti reali o complessi). Questo

approccio sviluppa competenze di problem-solving e ragionamento logico (Boaler, 2016).

3. Feedback immediato e auto-valutazione (inserimento di funzioni specifiche che consentono agli studenti un feedback in tempo reale per aiutarli a riflettere sui propri errori e migliorare progressivamente). Questa pratica rafforza l'apprendimento autoregolato e la comprensione profonda dei concetti Black & Wiliam, 1998.
4. Attività di peer-assessment (condivisione delle risposte tra studenti per favorire la valutazione tra pari). Questa pratica stimola la riflessione critica, la comunicazione e la responsabilità condivisa nel processo di apprendimento (Nicol & Macfarlane-Dick, 2006).
5. Creazione di verifiche formative e sommative ovvero test di verifica che monitorano il livello di comprensione degli studenti, ma anche attività di autovalutazione e portfolio digitale, utili per un feedback continuo e per la valutazione autentica delle competenze matematiche (Gikandi et al.2011).
6. Uso di risorse multimediali e interattive (l'inserimento di immagini, grafici, video o strumenti interattivi nelle domande permette di rendere le esercitazioni più coinvolgenti nonché di favorire la comprensione di concetti complessi come funzioni, geometria o statistica). Questo approccio stimola l'interesse e la motivazione (Mayer, 2009).
7. Creazione di attività collaborative (progetti di gruppo o attività collaborative online, dove gli studenti condividono idee, risolvono problemi insieme e discutono le strategie adottate). Questo favorisce lo sviluppo di competenze sociali e di pensiero critico (Johnson & Johnson, 2021).

In tale prospettiva si colloca il presente articolo, volto a contribuire al dibattito sul ruolo delle tecnologie digitali a supporto della didattica della matematica in ambito universitario.

L'obiettivo è offrire spunti di riflessione e analisi sulle relative potenzialità e criticità, con particolare attenzione alle implicazioni pedagogiche e metodologiche.

Nello specifico, verrà illustrato l'impiego di *EXAM.net* nel corso di Matematica 1 (insegnamento del primo anno del Corso di Laurea Magistrale in Scienze della Formazione Primaria), quale strumento versatile a supporto di una valutazione più integrata e innovativa, in grado di coniugare aspetti formativi e sommativi e di promuovere un processo valutativo più equo, partecipativo e orientato allo sviluppo delle competenze.

Alla luce degli obiettivi e del contesto didattico in cui è collocato lo studio, sono state formulate le seguenti domande di ricerca:

> RQ1) "In che modo l'integrazione di tecnologie digitali, come *EXAM.net*, può favorire lo sviluppo del pensiero matematico negli studenti del primo anno di Scienze della Formazione Primaria?"
>
> RQ2) "Quali competenze matematiche risultano maggiormente potenziate attraverso una valutazione formativa e sommativa mediata da *EXAM.net*?"

Bibliografia

- Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching.* Jossey-Bass/Wiley.
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Inside the Black Box: Raising Standards Through Classroom Assessment. *Phi Delta Kappan*, *80*(2), 139-148. https://doi.org/10.1177/003172171009200119

- Gikandi, J.W., Morrow, D., & Davis, N. (2011). Online formative assessment in higher education: A review of the literature. *Computers & Education*, *57*(4), 2333-2351.https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.06.004
- Johnson, D.W., & Johnson, R.T. (2021). *Learning together and alone: The history of our involvement in cooperative learning*. In Pioneering perspectives in cooperative learning (pp. 44-62). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003106760-3
- Mayer, R.E. (2009). Multimedia Learning. *Cambridge University Press*. https://doi.org/10.1017/CBO9780511811678
- Nicol, D., & Macfarlane-Dick, D. (2006). Formative assessment and self-regulated learning: A model and seven principles of good feedback practice. *Studies in Higher Education*, *31*(2), 199-218. https://dx.doi.org/10.1080/03075070600572090
- Tomlinson, C.A. (2014). The Differentiated Classroom: Responding to the Needs of All Learners *ASCD*.

Quizzing: un'attività di orientamento per un approccio efficace ai quesiti a risposta multipla

Francesca Alessio[1], Chiara de Fabritiis[1], Agnese I. Telloni [2]
[1] Università Politecnica delle Marche
[2] Università di Macerata
agnese.telloni@unimc.it

In questo studio presentiamo il design e la sperimentazione di un percorso di orientamento promosso dall'Università Politecnica delle Marche nell'ambito del *PNRR* e rivolto a studenti e studentesse di scuola superiore. Il percorso, che integra l'uso della tecnologia e le interazioni in presenza, è stato progettato con l'obiettivo di avere impatto sul livello metacognitivo dell'apprendimento della matematica nella fase di transizione fra scuola secondaria e università.

La ricerca ha messo in luce numerose criticità nella gestione di domande a risposta chiusa da parte di allieve e allievi. In particolare, è stato rilevato come la correttezza delle risposte fornite in un compito dipenda dal formato della domanda (Thacker et al., 2013). Inoltre, si è riscontrata la difficoltà diffusa, in particolare nelle scuole italiane, di fronte a quesiti a risposta multipla, e la conseguente attuazione di strategie inappropriate, che non tengono conto di come viene posta la domanda e delle opzioni proposte (Ferrari, 2004). Un ulteriore aspetto problematico è la percezione distorta che hanno studenti e studentesse della propria competenza rispetto a un quiz e, in generale, l'autovalutazione.

Tenendo conto di tutti questi elementi di criticità, è stato progettato un percorso sperimentale destinato alla di fase di transizione fra scuola secondaria e università e in linea con la cornice teorica della valutazione formativa e dell'uso della tecnologia per promuoverne l'attuazione (Black & William, 2009; Cusi et al., 2020).

Il percorso didattico è stato proposto nell'ambito dei progetti *PNRR Orientamento attivo nella transizione scuola-università*, ha avuto la durata di 15 ore, come stabilito dal bando, ed è stato articolato nelle seguenti fasi:

(1) introduzione sui test di accesso all'università;

(2) somministrazione di due quiz Moodle, uno su argomenti di matematica e uno su argomenti di logica;

(3) autovalutazione sui quiz appena svolti, prima di vederne la correzione e l'esito;

(4) analisi e discussione collettiva con il docente sugli esiti dei quiz;

(5) roleplaying in gruppi: creazione di un quiz con domande a risposta multipla da parte di ogni gruppo, risoluzione di un quiz creato da un altro gruppo e correzione collettiva.

L'attività di autovalutazione è stata progettata per incrementare la consapevolezza dei partecipanti sulle proprie difficoltà a livelli diversi (cognitive, di approccio ai quiz, di autovalutazione) e quindi attivarli nel processo di apprendimento (Albano et al., 2024). Inoltre, le fasi di discussione collettiva e di roleplaying sono state realizzate allo scopo di rendere ogni studente risorsa per l'apprendimento proprio e altrui, coinvolgendolo in attività di autovalutazione e valutazione fra pari (Telloni, 2022). La creazione di domande dovrebbe infine fornire una diversa prospettiva sul quiz e aprire quindi la strada all'elaborazione di strategie più efficaci.

Nel design del percorso sperimentale, l'uso della tecnologia, in linea con Cusi et al. (2020), è decisivo nel permettere la somministrazione dei quiz, la visualizzazione degli esiti in tempo reale e conseguentemente la presa di coscienza del livello di conoscenze e dell'eventuale difficoltà di autovalutazione.

Al termine del percorso è stato somministrato un questionario anonimo sull'attività svolta. Il questionario comprendeva da domande chiuse e domande aperte riguardanti la percezione di autoefficacia nei quiz appena affrontati e la percezione dell'impatto del percorso didattico.

Metodologia

Il percorso sperimentale è stato proposto negli anni scolastici dal 2022/23 al 2024/25 a un totale di 298 studenti e studentesse (136 maschi e 162 femmine) di 15 classi di scuole diverse (7 di Liceo Scientifico, 5 di Liceo Classico, 3 di Istituto Tecnico o Professionale). L'obiettivo dello studio è l'indagare l'impatto reale e percepito del percorso sperimentale sull'approccio a un futuro test, e, più in generale, sull'apprendimento delle studentesse e degli studenti. Per affrontare la ricerca, sono stati raccolti ed analizzati i quiz di logica e di matematica svolti da allieve e allievi, le domande da loro prodotte durante il roleplaying e le loro risposte al questionario finale.

In particolare, i quiz svolti sono stati analizzati dal punto di vista della correttezza, anche con un focus specifico sulle eventuali differenze di genere, mentre le domande prodotte durante il roleplaying e le risposte al questionario sono state congiuntamente analizzate allo scopo di mettere in luce eventuali cambiamenti di prospettiva dichiarati dagli studenti. Le risposte al questionario sono inoltre state esaminate secondo i principi della qualitative content analysis (Cho & Lee, 2014), in modo da categorizzare i temi emergenti e ricorrenti. In una prima fase, le ricercatrici hanno separatamente analizzato i dati e li hanno codificati, per poi confrontarsi sui testi controversi, fino a raggiungere un accordo.

Risultati

L'analisi delle risposte al questionario ha evidenziato la presenza di alcuni temi ricorrenti:

- (T1) incremento di conoscenza;
- (T2) incremento di consapevolezza, a livelli diversi;
- (T3) incremento del senso di autoefficacia;
- (T4) tipo di impatto del percorso sperimentale;
- (T5) visione della matematica.

In particolare, molti partecipanti, commentando la propria percezione del percorso sperimentale, hanno osservato che l'attività di costruzione delle domande per un quiz da sottoporre ai propri colleghi ha permesso loro di assumere un punto di vista diverso da quello di chi deve semplicemente rispondere a una domanda a scelta multipla. Ciò ha determinato l'attivazione di modalità di ragionamento sulla formulazione della richiesta e sulle diverse opzioni da proporre (corrette e non) che sono complementari a quelle tipicamente impiegate per affrontare un quesito.

L'analisi delle performance nei quiz di logica e matematica sottoposti nelle fasi iniziali del percorso ha evidenziato un generale migliore rendimento dei maschi rispetto alle femmine, più evidente per i quiz di matematica rispetto a quelli di logica. Inoltre, il divario risulta più marcato per le studentesse e gli studenti di scuole tecniche e professionali rispetto a quelli dei licei.

Conclusione

Nonostante le limitazioni dello studio, prima fra tutte la breve durata del percorso sperimentale, sembra che le diverse attività proposte abbiano indotto negli studenti e nelle studentesse una proficua riflessione sulla struttura delle domande di un test e una progressiva acquisizione di consapevolezza sui possibili approcci ad esse. Inoltre, essendo il percorso già stato ripetuto in diverse scuole e per tre anni scolastici consecutivi, è stato possibile costruire una banca dati di domande create durante l'attività che potrà ulteriormente essere incrementata e utilizzata come base per le successive esperienze. Infine, in prospettiva, il roleplaying può essere realizzato sfruttando più diffusamente il Workshop Moodle e l'automatizzazione della distribuzione dei compiti. Ulteriori ricerche saranno necessarie per comprendere l'eventuale dipendenza dell'impatto del percorso sperimentale e delle differenze di genere rilevate dalla scuola dei e delle partecipanti.

Bibliografia

- Albano, G., Mariotti, & M.A., Pierri, A. (2024). A blended teaching and learning environment for developing attitude towards mathematics. *Italian Journal Of Pure And Applied Mathematics*, *52*, 281–295.
- Black, P., & Wiliam, G. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, *21*(1), 5–31. https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5
- Cho, J. Y., & Lee, E. (2014). Reducing confusion about grounded theory and qualitative content analysis: Similarities and differences. *The Qualitative Report*, *19*(32), 1–20. https://doi.org/10.46743/2160-3715/2014.1028
- Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. *ZDM Mathematics Education*, *49*(5), 755–767.
- Ferrari, P.L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora.
- Thacker, B, Chapagain, G., Pattillo, D., & West, K. (2013). *The Effect of Problem Format on Students' Responses*. arXiv preprint. arXiv:1312.6004.
- Telloni, A.I. (2022). Roleplaying to develop students' awareness and robust learning of advanced mathematical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *55*(1), 44–67. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2077852