

A. DI GERLANDO-E. TIRONI-I. VISTOLI

Perdite in avvolgimenti di armatura
alimentati da chopper

L'Energia Elettrica

n. 7/8 1986

671

Perdite in avvolgimenti di armatura alimentati da chopper

SOMMARIO

L'impatto sempre più massiccio che l'Elettronica di Potenza ha sugli azionamenti richiede una attenzione crescente nel progetto e nell'impiego dei diversi componenti, al fine di ottenere buone caratteristiche di funzionamento del sistema nel suo complesso, sia dal punto di vista del controllo e della regolazione, sia sotto l'aspetto del suo rendimento energetico.

L'utilizzo dei dispositivi a semiconduttore consente, tramite la conversione e la regolazione delle grandezze di alimentazione, un più esteso campo di variazione delle condizioni di funzionamento; vi corrisponde però l'insorgere di diversi problemi, fra i quali, primario, un sensibile inquinamento armonico nelle forme d'onda di tensione e corrente, nelle varie sezioni dell'impianto e nei componenti dell'azionamento.

La qualità e l'entità di questo inquinamento armonico preoccupano in misura diversa a seconda del tipo di azionamento considerato; oggetto di questo lavoro è lo studio dell'entità dell'inquinamento, con l'obiettivo di fornire alcuni strumenti per contenerne gli effetti negativi sul buon funzionamento dei componenti dell'impianto, in particolare l'incremento delle perdite. Dopo un breve confronto fra contenuto armonico connesso all'impiego di un ponte total-controllato e di un chopper, l'attenzione viene rivolta allo studio delle perdite addizionali negli avvolgimenti di armatura di macchine a collettore.

Il metodo adottato è, nelle sue linee essenziali, quello utilizzato nel calcolo delle perdite addizionali nei dispositivi elettromagnetici statici soggetti a forme d'onda deformate: tale metodologia, che ha la sua giustificazione in studi classici, è stata qui applicata, con le dovute modifiche, al caso della macchina rotante considerata.

L'analisi, per ora limitata agli effetti del "ripple" di corrente dovuto all'alimentazione con chopper, evidenzia la dipendenza di tali perdite dalle grandezze di funzionamento (frequenza di chopper, duty-cycle, ampiezza e "ripple" di corrente) e dai principali parametri costruttivi della macchina (dimensioni e disposizione dei conduttori in cava): i risultati si prestano ad essere utilmente impiegati sia in fase di progetto o di scelta della macchina e del relativo alimentatore, sia in calcoli di verifica e di simulazione nelle varie condizioni di funzionamento.

1. PREMESSA

Gli azionamenti utilizzanti macchine con collettore a lamelle si possono dividere in due gruppi, per quanto riguarda l'alimentazione dell'armatura:

- sorgente in continua controllata da un complesso chopper (realizzato con tiristori o transistori);
- sorgente primaria in alternata (di solito polifase) controllata da un complesso raddrizzatore (molto diffuso il ponte total-controllato realizzato con tiristori).

(*) A. Di Gerlando; E. Tironi; I. Vistoli del Dipartimento di Elettrotecnica del Politecnico di Milano.

In entrambi i casi la corrente di armatura è unidirezionale ma variabile, con anda-

mento diverso a seconda del tipo di alimentazione e del tipo ed entità del controllo; ne consegue un aumento di perdite, nel circuito magnetico e negli avvolgimenti, e una commutazione più difficile della macchina rispetto al funzionamento a corrente costante.

Per questi motivi nel progetto di un azionamento utilizzando una macchina con collettore a lamelle, alimentata con circuiti statici, occorre una attenta cura del dimensionamento e nella scelta dei componenti e delle più idonee modalità di funzionamento del sistema; ciò al fine di garantire la regolarità del funzionamento, di realizzare una buona commutazione e di limitare il più possibile le perdite. È ben noto che, per migliorare la commutazione ed anche per limitare le perdite ferro, in queste macchine vengono utilizzate solo strutture magnetiche laminate.

Oggetto del presente studio sono le perdite del circuito elettrico, con particolare riferimento agli avvolgimenti di armatura.

Dopo un breve confronto tra le forme d'onda delle tensioni nei due tipi di alimentazione, lo studio si propone, limitatamente per ora al caso di alimentazione con complessi chopper, di individuare una relazione tra perdite addizionali e grandezze costruttive e di funzionamento della macchina e del relativo alimentatore, allo scopo sia di una maggior conoscenza dei fenomeni sia di un più equilibrato progetto del complesso macchina-alimentatore.

La metodologia seguita per il calcolo delle perdite addizionali si basa sul concetto che le perdite addizionali prodotte da una componente armonica di corrente sono indipendenti dalla contemporanea presenza delle altre armoniche; questa procedura, già da tempo applicata nello studio dei trasformatori, è giustificata da precedenti studi sulla distribuzione della corrente nei conduttori in regime periodico [4].

Inoltre nella valutazione delle perdite addizionali si è fatto riferimento all'effetto dell'addensamento di corrente nella sezione dovuto ai soli flussi di dispersione in cava: è ben noto che ai livelli di frequenza utilizzati in azionamenti con chopper, ed ai multipli di tale frequenza per le componenti armoniche, si manifestano anche fenomeni di addensamento legati all'"effetto pelle", cui sono soggetti sia i conduttori in cava che quelli delle teste di statore, ma il loro contributo in termini relativi risulta, nella generalità dei casi in cui il conduttore sia di sezione rettangolare, di entità irrilevante.

2. FORME D'ONDA DI TENSIONE (CHOPPER-RADDRIZZATORE)

Si ritiene utile instaurare un confronto tra le forme d'onda delle tensioni nei due casi considerati di alimentazione; si fa l'ipotesi, sempre verificata in pratica, che la corrente di armatura non si annulli mai.

Chopper.

La tensione è costituita da un treno di onde rettangolari di ampiezza V (v. Fig. 2.1 (a)); v_i corrisponde una componente continua $V_d = V \cdot \delta$ ($\delta = t_1/T = \text{duty cycle}$) ed una serie di armoniche di frequenza pari a quella del chopper ed ai suoi multipli.

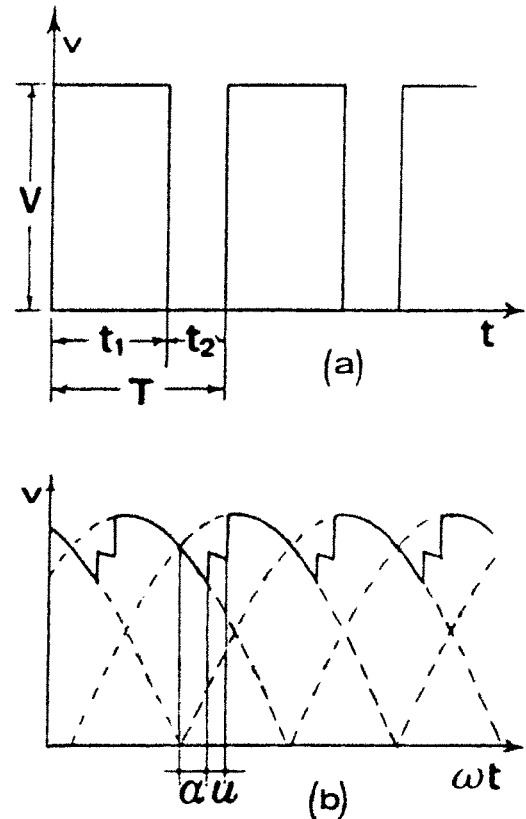


Fig. 2.1 - Tensione per: chopper (a); ponte total-controllato (b).

Il valore efficace dell'armonica h -esima vale:

$$(2-1) \quad V_h = \frac{V}{h \cdot \pi} \cdot \sqrt{1 - \cos(2 \cdot h \cdot \pi \cdot \delta)}$$

($h = 1, 2, 3, \dots$).

Ponte total-controllato (Graetz trifase).

La forma d'onda di tensione, con angolo di ritardo $\alpha \neq 0$, è riportata in Fig. 2.1 (b); v_i corrisponde una componente continua (non si tien conto della c.d.t. resistiva):

$$(2-2) \quad V_d = V_{do} - V_a - V_x$$

(V_{do} è la tensione raddrizzata a vuoto; V_a è il termine dovuto al controllo di fase; V_x è il termine dovuto alla commutazione); più una serie di armoniche a frequenza $6 \cdot h \cdot f$ ($h=1, 2, \dots$); (f =frequenza di rete).

In assenza di controllo di fase e considerando commutazione istantanea, il valore

efficace dell'armonica h-esima vale:

$$(2-3) \quad v_h = v_{do} \cdot \frac{\sqrt{2}}{36 \cdot h^2 - 1}$$

Per le altre situazioni, oltre a qualche cenno più avanti, si vedano le Raccomandazioni IEC 146 del 1973 par.443. Va comunque osservato che il controllo di fase porta ad un aumento importante del tasso di armoniche.

Il contenuto armonico del chopper è costituito da armoniche di ordine rispettivamente inferiore o superiore a quelle relative a un ponte total-controllato a seconda che la frequenza di lavoro del chopper sia inferiore o superiore a sei volte la frequenza di rete.

Utili elementi di giudizio per il confronto tra i due contenuti armonici derivano dall'esame delle ampiezze delle armoniche di tensione in valore relativo; si assume come riferimento il massimo valore medio di tensione raddrizzata. Per il chopper basta dividere per V la (2-1); l'ampiezza delle singole armoniche, in valore relativo, è indipendente dalla frequenza di lavoro del chopper ma dipende esclusivamente dall'ordine di armonicità e dal duty-cycle; per un assegnato valore di h il massimo si verifica per:

$$\delta = \frac{1 + 2 \cdot k}{2 \cdot h} \quad (k = 1, 2, \dots; k < h)$$

e vale:

$$v = \frac{\sqrt{2}}{\pi \cdot h}$$

Con alimentazione da ponte total-controllato, prescindendo dalla commutazione, si ottiene:

$$(2-4) \quad v = \frac{\sqrt{2}}{h \pi} \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + 36 \cdot h^2 \cdot \sin^2 \alpha}$$

L'ampiezza delle singole armoniche dipende dall'ordine di armonicità (h) e dal controllo di fase (α). Per un assegnato valore di h il massimo si verifica per $\alpha = \pi/2$ e in valore efficace vale:

$$v = \frac{\sqrt{2} \cdot 6 \cdot h}{h \pi \cdot 36 \cdot h^2 - 1}$$

In Tab. 2-2 sono riportati i più elevati valori efficaci, in valore relativo, delle prime 4 armoniche per i due casi considerati di alimentazione.

Tab. 2-2 - Valori relativi delle prime armoniche di tensione per alimentazione a chopper e a ponte total-controllato.

h	1	2	3	4
chopper	0,45	0,23	0,15	0,11
ponte	0,24	0,12	0,08	0,06

La conclusione che se ne trae è che l'alimentazione a chopper può dar luogo a correnti più livellate solo se la frequenza di lavoro è sufficientemente elevata.

3. ONDULAZIONE DELLA CORRENTE NEGLI AVVOLGIMENTI

Il circuito oggetto di studio è riconducibile allo schema di Fig. 3.1 nei casi di pratico interesse.

A seconda del tipo di connessione tra i vari circuiti interni della macchina cambiano i valori dei parametri: resistenza (R_t) e induttanza del circuito (L_t); in particolare:

- l'induttanza è quella di armatura, comprensiva di quella dei poli ausiliari ed eventualmente dei compensatori quando si abbia eccitazione separata; a questa va invece aggiunta quella dei poli principali nel caso di eccitazione serie; il rapporto tra i valori nei due casi è dell'ordine della decina. Il valore minimo di induttanza si ha nel caso di presenza di avvolgimenti compensatori; qualora si ritenesse necessario aggiungere un induttore in serie al circuito, L_t comprende anche il suo contributo;
- per la resistenza si possono svolgere le stesse considerazioni, con la differenza che il rapporto tra i valori nelle varie situazioni ha variazioni molto contenute;
- è da notare che con R_t si indica la resistenza totale ma l'analisi delle perdite addizionali riguarda la sola componente (R) di armatura.

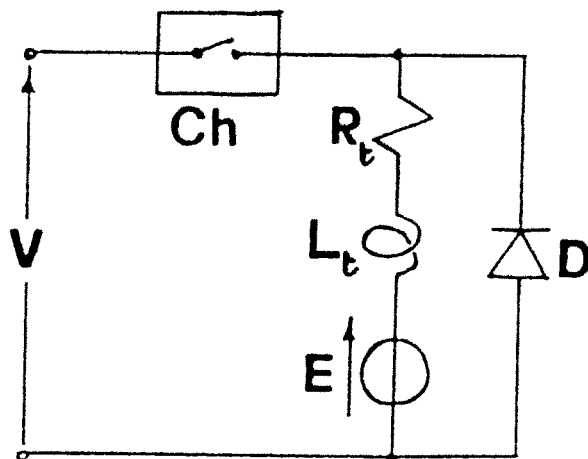


Fig. 3.1 - Schema del circuito elettrico allo studio.

Conseguenza di quanto precede è che il circuito può presentare costanti di tempo diverse a seconda del tipo di connessione; a questo proposito va inoltre tenuto presente che, a parità delle altre condizioni e considerando i valori relativi dei parametri, si ha che la resistenza

tende a diminuire con l'aumentare della potenza mentre l'induttanza (sempre in valore relativo) tende a crescere: la costante di tempo tende a crescere con la potenza e in modo apprezzabile.

Com'è ben noto, il funzionamento di un sistema chopper si può schematizzare con un interruttore che alimenta un circuito con determinati tempi di chiusura e apertura: la frequenza del fenomeno è tale da mantenere la corrente nel circuito in costante transitorio.

Il circuito di Fig. 3.1 contiene un solo chopper; negli azionamenti di maggior potenza si usano spesso diversi chopper tra loro in parallelo con comando sfasato di un angolo costante nel periodo. Questa configurazione, detta spesso "chopper polifase", porta a una frequenza di oscillazione pari a un multiplo della frequenza di lavoro di ciascun chopper.

La considerazione delle forme d'onda della corrente di macchina e del funzionamento del sistema in generale consente di ricondurre lo studio, per i casi più usuali, a quello di un chopper singolo lavorante alla frequenza risultante del complesso "polifase".

Senza entrare per ora nel merito della scelta della frequenza di funzionamento del chopper si può affermare che la corrente in ogni caso oscilla tra un minimo e un massimo e che il buon funzionamento richiede di limitare queste oscillazioni: ciò comporta tempi di apertura e di chiusura sufficientemente brevi in relazione alle costanti di tempo.

Proprio per risolvere questo problema senza aumentare eccessivamente la frequenza di funzionamento del chopper può essere necessaria l'aggiunta di un induttore esterno collegato in serie.

Schematicamente l'andamento della corrente, nella forma più generale, è quello (a) mostrato in Fig. 3.2.

conduzione ed il valore minimo I_{min} , che si ha alla fine dell'intervallo di blocco t_2 .

Alla fine del periodo t_1 di conduzione l'espressione della corrente è:

$$(3-1) \quad I_{max} = (1 - e^{-t_1/\tau}) \cdot \frac{V - E}{Rt} + I_{min} \cdot e^{-t_1/\tau}$$

($\tau = Lt/Rt$ è la costante di tempo del circuito).

Nella valutazione delle correnti si prescinde, per comodità, dal contributo di resistenza associato alle perdite addizionali: ciò è accettabile solo in quanto tali perdite devono essere molto contenute.

Per periodi di funzionamento del chopper T ($T = t_1 + t_2$) sensibilmente inferiori alla costante di tempo τ l'andamento della corrente è a tratti praticamente rettilinei (curva (b) di Fig. 3.2); si può allora scrivere:

$$(3-2) \quad I_{max} = \bar{I} + (\Delta I)/2; \quad I_{min} = \bar{I} - (\Delta I)/2.$$

Sostituendo la (3-2) nella (3-1) e ricordando che $\bar{I} = (\delta \cdot V - E)/Rt$ si ottiene l'espressione del "ripple":

$$(3-3) \quad \Delta I = 2 \cdot (\tanh(t_1/2\tau)) \cdot (1 - \delta)V/Rt.$$

Più che il valore assoluto acquista significato il rapporto ΔI tra il ripple e il valor medio della corrente. A questo scopo conviene introdurre le seguenti quantità:

$$X = 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot Lt; \quad r = Rt \cdot I_n / V;$$

$$x = X \cdot I_n / V; \quad i = \bar{I} / I_n;$$

con f_1 frequenza di lavoro del chopper, I_n e V corrente e tensione nominali.

Dallo sviluppo in serie della tangente iperbolica, troncato al termine lineare, si ottiene:

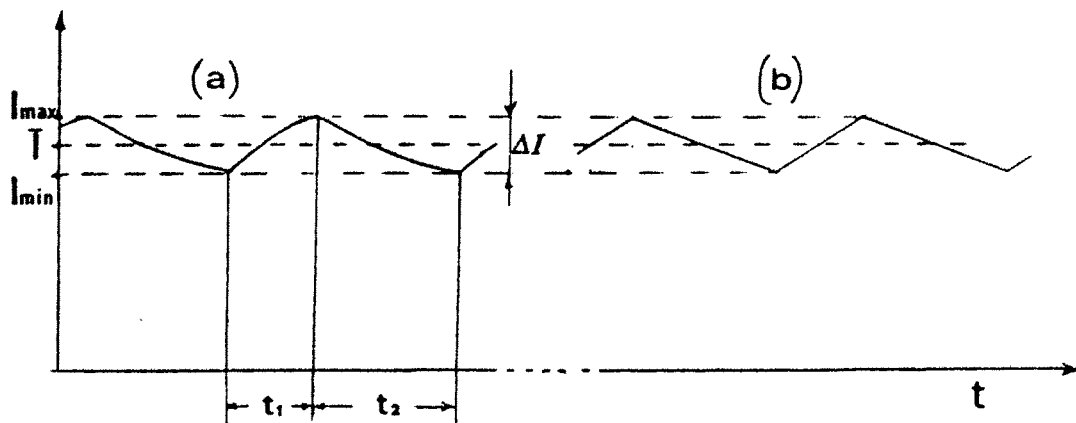


Fig.3.2- Forma d'onda di corrente in un avvolgimento alimentato da chopper.

Con riferimento alla simbologia di Fig. 3.2 la corrente di armatura ha valor medio $\bar{I}$, presenta un "ripple" ΔI pari alla differenza tra il valore massimo I_{max} , raggiunto alla fine dell'intervallo t_1 di

$$(3-4) \quad \Delta i = \Delta I / \bar{I} = \frac{2 \cdot \pi}{x \cdot i} \cdot \delta \cdot (1 - \delta);$$

con i valori usuali di δ e di T/τ si valuta in tal modo un Δi modestamente errato in eccesso.

La curva che dà Δi in funzione di δ (a x costante) è una parabola. La (3-4) evidenzia inoltre come, a pari caratteristiche di macchina e di alimentazione, il massimo "ripple" della corrente si ha per $\delta = 0,5$ e vale:

$$\Delta i_{\max} = \frac{\pi}{2 \cdot x \cdot i}$$

Nelle condizioni più usuali di funzionamento la situazione di $\delta = 0,5$ corrisponde, a flusso nominale, ad avere una f.e.m. pari a circa metà della tensione nominale applicata; correlativamente si avrà una velocità di rotazione pari a circa metà della nominale.

I modi atti a ridurre il "ripple relativo" Δi sono principalmente due:

- incremento di x : ciò si può ottenere incrementando o l'induttanza o la frequenza o entrambi;
- nel caso di eccitazione indipendente, variazione dell'eccitazione di macchina al variare della velocità in modo da mantenere il Δi al di sotto del massimo.

Ai fini del dimensionamento, in particolare per la scelta della frequenza e la definizione del valore necessario per la induttanza L_t , risulta più significativo risolvere la (3-4) rispetto ad x :

$$(3-5) \quad x = 2 \cdot \pi \cdot \delta \cdot (1 - \delta) / (i \cdot \Delta i)$$

Tale espressione esprime più direttamente il legame tra quantità di progetto e grandezze funzionali, ed evidenzia come, nell'ipotesi di mantenere costante l'eccitazione al suo valore nominale, la massima frequenza di lavoro del chopper si ha per una velocità di rotazione della macchina pari a metà della nominale, se si vuole mantenere un prefissato valore di Δi costante per tutte le condizioni di funzionamento.

I provvedimenti atti a limitare la frequenza di chopper sono analoghi a quelli, già indicati, per contenere il "ripple" relativo di corrente.

Può essere inoltre utile individuare una relazione che esprima il periodo di chopper T in funzione dei parametri e delle grandezze funzionali: partendo dalle espressioni di $I_{\max}$ e di $I_{\min}$ che la corrente di macchina assume rispettivamente alla fine dell'intervallo t_1 di conduzione e t_2 di blocco (v. App. 1), si perviene ad una espressione piuttosto complessa del rapporto T/τ .

Tale espressione è però normalmente semplificabile; con gli usuali valori delle quantità in gioco essa è riducibile alla seguente:

$$(3-6) \quad \frac{T}{\tau} \approx \frac{r \cdot i \cdot \Delta i}{\delta \cdot (1 - \delta)}$$

4. PERDITE DOVUTE AL "RIPPLE" DI CORRENTE

In una macchina a collettore a lamelle alimentata con un complesso chopper, oltre alle perdite addizionali usuali se ne possono individuare altre specificamente connesse al tipo di alimentazione.

Si esamineranno qui solo le perdite addizionali di armatura dovute al "ripple" di corrente; esse saranno espresse in valore relativo rispetto a una perdita convenzionale d'armatura:

$$R \cdot \bar{I}^2$$

dove R è la resistenza di armatura misurata in d.c.

Per raggiungere lo scopo prefisso si valuteranno due diversi coefficienti, ognuno dei quali tenga conto di un fenomeno distinto e tali per cui si possa giungere alla valutazione delle totali perdite addizionali cercate, attraverso la somma dei contributi di tali coefficienti:

$$P_{add} = (K_{ai} + K_{ar}) \cdot R \cdot \bar{I}^2$$

L'analisi descritta, inoltre, farà riferimento all'ipotesi di corrente ad andamento rettilineo (v. Fig. 3.2 (b)).

K_{ai} : tiene conto del contributo dovuto al valore efficace della corrente.

Data la forma d'onda è agevole il calcolo del valore efficace I della corrente; si può calcolare il corrispondente incremento di perdita rispetto alla perdita convenzionale utilizzando il coefficiente:

$$(4-1) \quad K_{ai} = (R \cdot I^2 - R \cdot \bar{I}^2) / (R \cdot \bar{I}^2)$$

cui corrisponde, per la suddetta forma d'onda, il valore:

$$K_{ai} = \frac{1}{12} \cdot (\Delta i)^2$$

K_{ar} : tiene conto delle perdite di addensamento prodotte dalle armoniche di corrente.

Per l'armonica h -esima si può valutare una resistenza addizionale ($R_a(h)$) che, moltiplicata per il quadrato del valore efficace della corrispondente armonica h -esima I_h , dà le perdite addizionali dovute a quell'armonica; in definitiva per tenere conto dell'insieme di queste perdite si dovrà pervenire a valutare:

$$(4-2) \quad K_{ar} = \left(\sum_{h=1}^{\infty} R_a(h) \cdot I_h^2 \right) / (R \cdot \bar{I}^2)$$

L'analisi di Fourier porta a scomporre la parte variabile della forma d'onda di corrente in una serie di armoniche (v. app. 2) di valore efficace:

$$(4-3) \quad I_h = \left[\Delta i / (\sqrt{2} \cdot h \cdot \pi) \right] \cdot \frac{\sin(h \cdot \pi \cdot \delta)}{\delta \cdot (1 - \delta)}$$

Occorre ora procedere alla valutazione di $Ra(h)$. In regime sinusoidale il coefficiente di addensamento Ka è ricavabile da una nota espressione (riportata in App. 3 per comodità) funzione in particolare di un parametro:

$$\xi \equiv \sqrt{F} \cdot s \quad Ka = Ka(\xi)$$

(s è la dimensione del conduttore normale alla direzione del flusso disperso).

Conviene ora introdurre il rapporto tra il valore di resistenza addizionale alla frequenza dell'armonica h -esima ($Ra(h)$) e il corrispondente valore alla frequenza di lavoro del chopper ($Ra(1)$):

$$Ra(h)/Ra(1) .$$

Ciò consente il riferimento dei calcoli alla frequenza fondamentale (f_1) del chopper e quindi al corrispondente valore ξ_1 del parametro ξ ; osservando poi che:

$$\xi_h = \sqrt{h} \cdot \xi_1$$

il rapporto in questione, indicato con $Kh(\xi_1)$, vale:

$$(4-4) \quad \frac{Ra(h)}{Ra(1)} = Kh(\xi_1) = \frac{Ka(\sqrt{h} \cdot \xi_1) - 1}{Ka(\xi_1) - 1}$$

Definita la funzione:

$$S(\delta, \xi_1) = \sum_{h=1}^{\infty} Kh(\xi_1) \cdot \frac{\sin^2(h \cdot \pi \cdot \delta)}{h^4}$$

si ottiene per Kar (v. la (4-2)):

$$(4-5) \quad Kar = \frac{Ka(\xi_1) - 1}{2 \cdot \pi^4 \cdot \delta^2 \cdot (1-\delta)^2} \cdot S(\delta, \xi_1) \cdot (\Delta i)^2$$

In definitiva l'espressione del coefficiente di perdite addizionali, ricordando l'espressione (3-4) del "ripple" relativo Δi , risulta:

$$(4-6) \quad Kat = \frac{1}{(\pi \cdot i)^2} \cdot \left[\frac{\pi^2}{3} \cdot [\delta \cdot (1-\delta)]^2 + \frac{2}{\pi^2} \cdot [Ka(\xi_1) - 1] \cdot S(\delta, \xi_1) \right]$$

Per la complessità della funzione $Kh(\xi_1)$ non è possibile calcolare in forma chiusa la $S(\delta, \xi_1)$; se ne può valutare un valore approssimato troncando opportunamente la serie.

In Fig. 4.1 è riportato l'andamento di S in funzione di δ e per alcuni valori di ξ_1 : nel calcolo si è troncata la serie al decimillesimo termine e si è fatto riferimento al caso molto diffuso di 2 conduttori nel senso dell'altezza della cava (i risultati sono però validi anche per $m = 2$

con errori molto modesti, spesso al di sotto del percento); le valutazioni sono per $0 \leq \delta \leq 0,5$, data la simmetria della funzione $S(\delta, \xi_1)$ rispetto a $\delta = 0,5$.

E' interessante rilevare che la funzione $S(\delta, \xi_1)$ ha, come appare anche dai grafici di Fig. 4.1, due curve limiti: una superiore per $\xi_1 \rightarrow 0$ e l'altra inferiore per $\xi_1 \rightarrow \infty$; dall'osservazione di tali curve limiti si deduce tra l'altro che la variazione di $S(\delta, \xi_1)$ in funzione di δ tra i valori limiti di ξ_1 è quasi costante in un ampio campo a partire da valori non piccolissimi di δ .

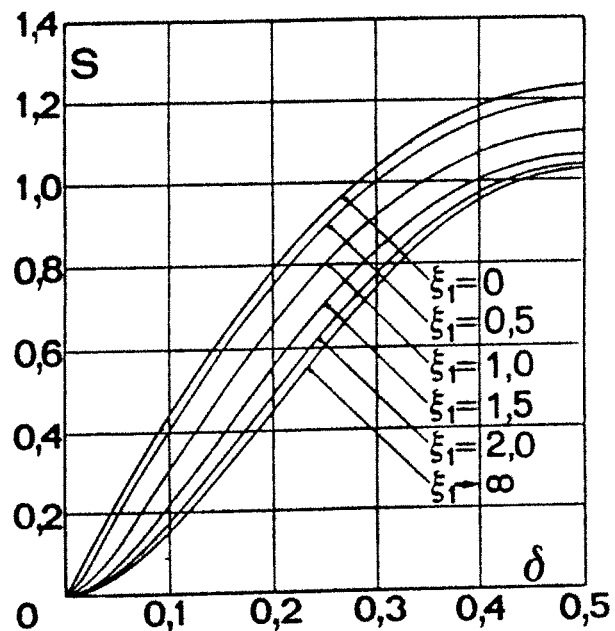


Fig. 4.1 - $S(\delta, \xi_1)$ in funzione di δ e per diversi valori di ξ_1 .

La funzione $S(\delta, \xi_1)$ assume inoltre espressioni più semplici nelle due condizioni limiti.

- Caso di ξ_1 piccolo (approssimativamente minore di 1; f_1 e/o s piccoli).

Risulta:

$$(4-7) \quad Ka(\xi_1) - 1 \approx \xi_1^4$$

così per tutte le armoniche per le quali

sia $\xi_h = \sqrt{h} \cdot \xi_1 \leq 1$ sarà:

$$(4-8) \quad Ka(\xi_h) - 1 \approx h^2 \cdot \xi_1^4$$

ovviamente quest'ultima relazione è valida solo fino ad un valore limite dell'ordine di armonicità e sarà perciò accettabile solo se risulta applicabile alla banda energeticamente più significativa dello spettro di frequenza che è rappresentata dalle armoniche delle frequenze più basse; d'altra parte ovviamente la validità si estende tanto più quanto più piccolo è ξ_1 .

Sorge naturale a questo punto cercare il limite superiore $S'(\delta)$ della famiglia $S(\delta, \xi_1)$ per $\xi_1 \rightarrow 0$. In queste condizioni, ricordando le (4-4), (4-6), (4-7) risulta per ogni valore di h :

$$(4-9) \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} Kh(\xi_1) = h^2;$$

il limite è cioè indipendente da ξ_1 ; ne deriva:

$$(4-10) \quad S'(\delta) = \lim_{\xi_1 \rightarrow 0} S(\delta, \xi_1) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin^2(h \cdot \pi \cdot \delta)}{h^2}$$

La somma di questa serie è nota e vale:

$$S'(\delta) = \frac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot \delta \cdot (1-\delta)$$

A tale valore corrisponde un valore limite del coefficiente K_{ar} di resistenza addizionale (v. le (4-2) e (4-5)):

$$(4-11) \quad K_{ar} = \frac{1}{(\pi \cdot i)^2} \cdot [K_a(\xi_1) - 1] \cdot \delta \cdot (1-\delta)$$

Questa formula è di uso agevole e si può utilizzare anche per gli altri valori di ξ_1 , in quanto porta a valutazioni approssimate in eccesso delle perdite addizionali con errori modesti e comunque facilmente valutabili attraverso le curve di Fig. 4.1.

- Caso di ξ_1 grande (approssimativamente $\xi_1 > 4 \div 5$; f_1 e/o s grandi).

Risulta:

$$(4-12) \quad \begin{aligned} K_a(\xi_1) - 1 &\approx \xi_1 \\ K_a(\xi_h) - 1 &\approx \sqrt{h} \cdot \xi_1. \end{aligned}$$

Questa seconda relazione è valida per tutti i valori di h ; il rapporto $Kh(\xi_1)$ non dipende da ξ_1 , e ciò è sempre più vero quanto più elevato è ξ_1 .

Ne deriva che:

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} Kh(\xi_1) = \sqrt{h};$$

questa relazione porta a valutare un valore limite inferiore $S''(\delta)$ della funzione $S(\delta, \xi_1)$; questo risulta espresso dalla:

$$(4-13) \quad S''(\delta) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin^2(h \cdot \pi \cdot \delta)}{h^{(7/2)}}$$

Per illustrare anche quantitativamente l'andamento di K_{ar} se ne è calcolato il valore in funzione di ξ_1 per un ripple relativo (riferito alla corrente nominale) pari a 1 e per un duty-cycle pari a 0,5 (si ricorda che K_{ar} è proporzionale al quadrato del "ripple" relativo).

Per i calcoli si sono utilizzati valori medi usuali, quali si trovano anche in letteratura, per i parametri costruttivi come: il rapporto tra lunghezza di lato attivo e lunghezza media di conduttore, resistività del materiale, costanti di tempo, numero di conduttori nel senso

dell'altezza di cava ($m=2$), ecc.; i risultati dei calcoli sono riportati in Fig. 4.2.

L'andamento mostrato da K_{ar} è quantitativamente significativo indipendentemente dal tipo di macchina se si tiene presente che i valori pratici di ξ_1 non sono molto variabili, dipendendo dal prodotto della radice della frequenza per lo spessore del conduttore nel senso dell'altezza di cava: infatti lo spessore tende a crescere con la potenza ma la frequenza di chopper è limitata in tal caso dalla necessità dell'impiego di tiristori; viceversa per le

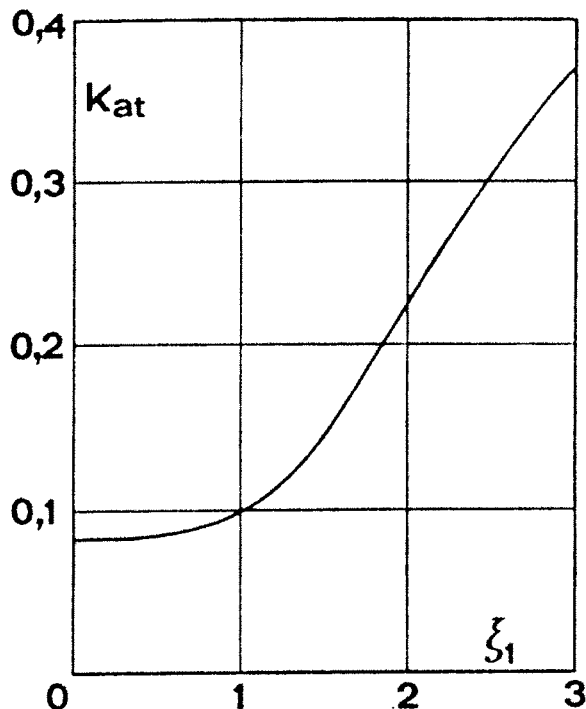


Fig. 4.2 - Valutazione numerica di K_{ar} in funzione di ξ_1 , per ripple relativo unitario e duty-cycle pari a 0,5, per usuali valori costruttivi.

macchine di potenza limitata nelle quali a una diminuzione dello spessore fa da riscontro l'aumento della frequenza per la possibilità di far ricorso ai transistori.

5. CONCLUSIONI

L'avvolgimento di armatura di una macchina con collettore a lamelle alimentata da una sorgente di tensione costante attraverso un complesso chopper è sede di perdite addizionali legate specificamente al fatto di essere interessato da corrente non costante; si hanno così perdite addizionali dovute sia al valore efficace della corrente, diverso dal valor medio, assunto come riferimento, sia all'addensamento di corrente prodotto nei conduttori dalla componente variabile della corrente stessa.

Preliminare alla valutazione delle perdite è lo studio dell'ondulazione della corrente; nell'ipotesi di periodi di lavoro T

del chopper sensibilmente inferiori alla costante di tempo elettrica l'andamento della corrente si può considerare a tratti praticamente rettilinei; si è così ricavata l'espressione del "ripple" in funzione del duty-cycle. Tale espressione mette in evidenza che:

- il valore massimo del ripple si ha per un duty cycle pari a 0,5;
- il ripple relativo (riferito al valor medio della corrente) è inversamente proporzionale al prodotto della frequenza di chopper per l'induttanza del circuito;
- il ripple assoluto è indipendente dalla corrente per cui, riferito alla corrente effettiva, dà luogo ad un rapporto Δi crescente al diminuire della corrente stessa.

Si conclude che la macchina alimentata tramite chopper presenta perdite in armatura somma di un termine indipendente dal carico e di quello usuale proporzionale al quadrato del carico; ciò influenza sia il valore del rendimento sia il carico per il quale il rendimento è massimo.

La valutazione delle perdite addizionali qui esaminate avviene poi attraverso la definizione di due coefficienti, uno per ciascuna delle cause che le originano, la cui somma conduce all'espressione complessiva.

Per quanto riguarda la somma della serie indicata in tale espressione si è constatato come essa sia poco sensibile al variare del numero di conduttori disposti nel senso della altezza di cava per cui la valutazione fatta per il caso (molto comune) di due conduttori può essere applicata ad un altro numero qualsiasi con un modesto errore.

La somma della serie inoltre, in funzione del duty-cycle, descrive una famiglia di curve al variare del parametro ξ_1 ; esistono peraltro due curve limiti, una per $\xi_1 \rightarrow 0$ e l'altra per $\xi_1 \rightarrow \infty$.

Dall'analisi eseguita si deduce che le perdite addizionali dovute al "ripple" di corrente calano al crescere della frequenza di lavoro del chopper: in particolare un'indagine numerica porta a concludere che, per macchine della potenza di qualche decina di kw, con costruzione di media accuratezza, è sufficiente lavorare al di sopra del kHz per contenere a livelli modesti le addizionali da "ripple" negli avvolgimenti.

Altre interessanti indicazioni che si sono dedotte:

- il massimo di tali perdite si ha per un duty-cycle pari a 0,5;
- a pari frequenza e "duty cycle" queste perdite sono inversamente proporzionali al quadrato di $i = \bar{I}/\bar{I}_n$; ciò significa che al diminuire della corrente media rispetto al valore nominale e a pari ripple assoluto il coefficiente delle perdite addizionali cresce rapidamente.

APPENDICE 1: ESPRESSIONE DEL PERIODO DI CHOPPER IN FUNZIONE DEI PARAMETRI E DELLE GRANDEZZE FUNZIONALI

Si vuole ottenere la relazione che lega il periodo di lavoro del chopper al duty-cycle δ , per un dato valore di ripple Δi .

A tale scopo si impiegano le espressioni risolutive che forniscono il valore della corrente di armatura alla fine dell'intervallo t_1 di conduzione e alla fine dell'intervallo t_2 di blocco:

$$I_M = \frac{V-E}{Rt} - \left\{ \frac{V-E}{Rt} - I_m \right\} \cdot e^{-t_1/\tau} \quad (A1-1)$$

$$I_m = -\frac{E}{Rt} + \left\{ I + \frac{E}{Rt} \right\} \cdot e^{-t_2/\tau}$$

Ritenendo poi ancora valide le (3-2), dalla inversione delle (A1-1) rispetto agli intervalli di tempo t_1 e t_2 , si ottiene:

$$T = t_1 + t_2 = \tau \cdot \ln \left[\frac{\frac{V-E}{Rt} - \bar{I} + \frac{\Delta i}{2}}{\frac{V-E}{Rt} - \bar{I} - \frac{\Delta i}{2}} \right] \quad (A1-2)$$

$$\left[\frac{\frac{E}{Rt} + \bar{I} + \frac{\Delta i}{2}}{\frac{E}{Rt} + \bar{I} - \frac{\Delta i}{2}} \right]$$

Tenuto poi presente che:

$$\bar{I} = \frac{\delta \cdot V - E}{Rt}; \quad r = \frac{Rt \cdot \bar{I}_n}{V};$$

$$i = \bar{I}/\bar{I}_n; \quad \Delta i = \Delta i/\bar{I},$$

la (A1-2) si trasforma come segue, in funzione di quantità espresse in valore relativo:

$$\frac{T}{\tau} = \ln \left[\frac{4 \cdot \delta \cdot (1-\delta) + r \cdot i \cdot \Delta i \cdot (2+r \cdot i \cdot \Delta i)}{4 \cdot \delta \cdot (1-\delta) - r \cdot i \cdot \Delta i \cdot (2-r \cdot i \cdot \Delta i)} \right] \quad (A1-3)$$

Se l'ipotesi di $T \ll \tau$ è verificata, è lecito, con buona approssimazione, sviluppare in serie il logaritmo naturale, troncando lo sviluppo al termine lineare.

In tal modo il rapporto T/τ è circa pari all'argomento del logaritmo diminuito dell'unità, da cui:

$$\frac{T}{\tau} \approx \frac{4 \cdot r \cdot i \cdot \Delta i}{4 \cdot \delta \cdot (1-\delta) - 2 \cdot r \cdot i \cdot \Delta i + (r \cdot i \cdot \Delta i)^2}$$

(A1-4)

APPENDICE 2: CALCOLO DEL CONTENUTO ARMONICO DEL RIPPLE DI CORRENTE.

Il calcolo è limitato ad una corrente di armatura con forma d'onda del tipo di fig. 3-2(b), cioè a tratti rettilinei.

Mediante l'analisi di Fourier si può esprimere la forma d'onda di corrente $i(t)$ nella forma:

$$i(t) = \bar{I} + \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{I}{hM_s} \cdot \sin(h\omega t) + \frac{I}{hM_c} \cdot \cos(h\omega t) \right]$$

(A2-1)

dove ω è la pulsazione corrispondente alla frequenza di lavoro del chopper.

Il calcolo dei coefficienti della serie assume poi la seguente forma:

$$\begin{aligned} I_{hM_s} &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot \sin(h\omega t) dt = \\ &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^{t_1} \left(I_m + \frac{\Delta I}{t_1} \cdot t \right) \cdot \sin(h\omega t) dt + \\ &+ \frac{2}{T} \cdot \int_{t_1}^T \left[I_M - \frac{\Delta I}{t_2} \cdot (t-t_1) \right] \cdot \sin(h\omega t) dt \end{aligned}$$

(A2-2)

$$\begin{aligned} I_{hM_c} &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot \cos(h\omega t) dt = \\ &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^{t_1} \left(I_m + \frac{\Delta I}{t_1} \cdot t \right) \cdot \cos(h\omega t) dt + \\ &+ \frac{2}{T} \cdot \int_{t_1}^T \left[I_M - \frac{\Delta I}{t_2} \cdot (t-t_1) \right] \cdot \cos(h\omega t) dt \end{aligned}$$

Sviluppando le (A2-2) si ottengono, per i valori dei coefficienti:

$$I_{hM_s} = \frac{\Delta I}{2 \cdot h^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\sin(h \cdot 2 \cdot \pi \cdot \delta)}{\delta \cdot (1-\delta)}$$

(A2-3)

$$I_{hM_c} = \frac{\Delta I}{2 \cdot h^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\cos(h \cdot 2 \cdot \pi \cdot \delta) - 1}{\delta \cdot (1-\delta)}$$

Dalle (A2-3), infine, si può calcolare il valore efficace della h-esima armonica di corrente:

$$I_h = \frac{\Delta I}{h \sqrt{2} \cdot h^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{\sin(h \cdot \pi \cdot \delta)}{\delta \cdot (1-\delta)}$$

(A2-4)

APPENDICE 3: COEFFICIENTE DI ADDENSAMENTO K_a IN REGIME SINUSOIDALE

Come è noto, in regime sinusoidale il coefficiente della resistenza addizionale R_a di addensamento in funzione della resistenza ohmica è dato dalla:

$$(A3-1) \quad R_a = (K_a - 1) \cdot R$$

K_a ha la seguente espressione:

$$K_a = 1 + \frac{\ell}{\ell_m} \cdot \left[\varphi(\xi) + A \cdot \psi(\xi) - 1 \right]$$

(A3-2)

dove:

ℓ = lunghezza lato attivo;
 ℓ_m = lunghezza lato attivo più una testa di matassa;
 $A = (m - 1)/3$
 m = No complessivo di conduttori disposti nel senso dell'altezza di cava;

$$\varphi(\xi) = \xi \cdot \frac{\sinh(2 \cdot \xi) + \sin(2 \cdot \xi)}{\cosh(2 \cdot \xi) - \cos(2 \cdot \xi)};$$

$$\psi(\xi) = 2 \cdot \xi \cdot \frac{\sinh(\xi) - \sin(\xi)}{\cosh(\xi) + \cos(\xi)};$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot f}{\rho} \cdot \frac{br}{bc} \cdot s}$$

ξ è una variabile ausiliaria, con

μ_0 = permeabilità dell'aria;
 ρ = resistività del conduttore;
 br/bc = rapporto fra la dimensione totale netta di rame nella direzione della larghezza bc della cava, e la larghezza br ;
 s = altezza del conduttore nel senso dell'altezza di cava.

E' possibile, per alcuni valori di ξ , fare uso di espressioni approssimate di

$\varphi(\xi)$ e $\psi(\xi)$, ottenibili mediante sviluppo in serie delle funzioni esatte:

$$\varphi(\xi) \approx 1 + \frac{4}{45} \cdot \xi^4 \quad \text{per } \xi \leq 1,2$$

$$\psi(\xi) \approx \frac{1}{3} \cdot \xi^4 \quad \text{per } \xi \leq 0,7$$

$$\varphi(\xi) \approx \xi \quad \text{per } \xi \geq 3$$

$$\psi(\xi) \approx 2 \cdot \xi \quad \text{per } \xi \geq 6$$

Manoscritto ricevuto il 17 luglio 1986.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Di Gerlando, E. Tironi, I. Vistoli: "Energy Characteristics of Road Electric Drives". International Conference on Electrical Machines; Proceedings Part 1, Lausanne, 18 - 21 settembre 1984, pages. 197 - 200.
- [2] E. Tironi, A. Di Gerlando, G. Ubezio: "Modulo di potenza di azionamento a transistori per veicolo elettrico ad accumulatori". Congresso Drive Electric Italy '85, Sorrento, 1 - 4 ottobre 1985
- [3] F. Correggiari: "Costruzione di Macchine Elettriche", Ediz. La Goliardica, 1967.
- [4] P. Bunet: "Courants de Foucault"; Paris, Librairie J.-B. Baillière et fils, 1933; p.94 e segg.
- [5] H. Buhler: "Electronique de Puissance", Traité d'électricité - Electronique Industrielle 1, Ediz. Georgi-Suisse, 1978.
- [6] J. Schaefer: "Rectifier Circuits: Theory and Design. New York: Wiley, 1965, pp.298-299, 332-334.
- [7] R. Bean e altri: "Transformers for the Electric Power Industry; New York: Mc Graw Hill, 1959, pp.124-127.
- [8] S. Crepaz: "Eddy-Current Losses in Rectifier Transformers"; IEEE Trans on PAS Vol PAS 89 No 7 Sept-Oct 1970, pp.1651-1656.
- [9] IEC Recommendation - Publication 146; Semiconductor Convertors, 1973.