

UNA FORMULAZIONE VARIAZIONALE PER LA FRATTURA COESIVA IN UNA BARRA IN TRAZIONE

C. COMI¹, S. MARIANI¹, M. NEGRI², U. PEREGO¹

¹ *Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano, Milano*

² *Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Pavia*

SOMMARIO

In questo lavoro si studia il problema della formazione e della crescita di una frattura coesiva in una barra elastica. Si mostra come sia possibile ottenere la posizione di attivazione della cricca dalle condizioni di minimo di un funzionale di energia che contenga anche l'energia superficiale della cricca. Il danneggiamento progressivo dell'interfaccia coesiva è tenuto in conto grazie ad una procedura passo-passo. Si mostra che anche la soluzione del problema nel passo finito rende stazionario un funzionale definito ad ogni passo.

ABSTRACT

In this work, the problem of inception and growth of a cohesive crack in an elastic bar is considered. The position where the crack actually forms is obtained from the minimality conditions of an energy functional which includes the surface energy. The progressive damage of the cohesive interface is taken into account by means of a step by step procedure. The finite step solution is also shown to make stationary a functional defined for each step.

1. INTRODUZIONE

Si considera una barra soggetta ad un carico distribuito assiale ed a spostamento imposto ad un estremo. Il materiale è assunto elastico lineare con un limite elastico variabile lungo la barra. Quando tale limite viene raggiunto si assume che si possa attivare una cricca coesiva con un legame softening tra tensione trasmessa e discontinuità di spostamento, fino a rottura completa.

Nella letteratura recente sono presenti numerosi contributi intesi a fornire una caratterizzazione variazionale del problema della generazione di fratture in mezzi elastici [1-6]. Facendo riferimento all'impostazione di Braides et alii [2], inizialmente si assume per il sistema un comportamento perfettamente reversibile (il materiale ritorna integro a seguito dell'eventuale richiusura della cricca) e si dimostra che la soluzione del problema minimizza l'energia potenziale totale del sistema che comprende un termine di energia elastica, definito sul volume, ed un termine di superficie relativo alla cricca. La posizione di innesco della

frattura può anch'essa essere ottenuta dalle condizioni di ottimalità per valore nullo dell'apertura di fessura.

Approssimando l'evoluzione reale con una sequenza di passi finiti reversibili, ed imponendo quindi la non reversibilità solo al termine del passo, si dimostra poi che la soluzione di ogni passo finito può essere ottenuta dalle condizioni di ottimalità di un opportuno funzionale.

Un semplice esempio con carico assiale distribuito in modo uniforme e spostamento imposto ad un estremo crescente nel tempo illustra i risultati teorici conseguiti.

2. FRATTURA COESIVA DI UNA BARRA TESA

Si consideri una barra di lunghezza $L=10$ mm, di modulo elastico pari a $E=1$ MPa, uniforme su tutta la sua lunghezza, soggetta ad un carico distribuito uniforme in direzione del suo asse pari a $b=0.2 E/L$. Sia inoltre imposto al suo estremo uno spostamento $\eta(t)$, monotonamente crescente nel tempo. Si assuma che la resistenza alla frattura della barra sia data da $p_0(x) = a(x)g(0)$, variabile lungo la barra secondo la legge $a(x) = 1 + (x - L/2)^2$, con $p_0(L/2) = 0.1 E$. Il modello coesivo assunto prevede una diminuzione lineare della resistenza con l'apertura w della frattura (figura 1). Alla fine del passo che va dall'istante t_n all'istante t_{n+1} , la forza per unità di superficie p_{n+1} scambiata tra le facce di una cricca posta in z è governata dalle seguenti relazioni

$$\begin{cases} p_{n+1} = p(w_{n+1}, \xi_{n+1}, z) = a(z) \frac{g(\xi_{n+1})}{\xi_{n+1}} w_{n+1} & \text{for } \xi_{n+1} > 0 \\ p(0, 0, z) \in [0, p_0(z)] & \text{for } \xi_{n+1} = 0 \\ p_{n+1} - a(z)g(\xi_{n+1}) \leq 0 & (p_{n+1} - a(z)g(\xi_{n+1}))\Delta\xi = 0 \quad \Delta\xi \geq 0 \end{cases}$$

dove ξ_n rappresenta il danno non reversibile accumulato sino all'inizio del passo corrente. E' possibile definire un potenziale $\tilde{G}(w, \xi_n)$ per l'energia superficiale della cricca nel passo

$$\tilde{G}(w, \xi_n) = \begin{cases} \frac{g(\xi_n)}{2\xi_n} w^2 & \text{for } w \leq \xi_n \\ G(w) - G(\xi_n) + \frac{\xi_n g(\xi_n)}{2} & \text{for } w \geq \xi_n \end{cases}$$

Nel caso considerato, in cui si ha una decrescita lineare della forza al crescere dell'apertura, la funzione $g(w) = \partial\tilde{G}/\partial w$ per $\xi_n = 0$ è data da (figura 1)

$$g(w) = \begin{cases} g_0 \left(1 - \frac{1}{w_{crit}} w\right) & \text{for } w \leq w_{crit} \\ 0 & \text{for } w \geq w_{crit} \end{cases}$$

con $w_{crit} = 0.15 L$ e $g_0 = 0.1 E$.

Definendo il seguente funzionale energia per il passo corrente (u rappresenta lo spostamento in direzione assiale)

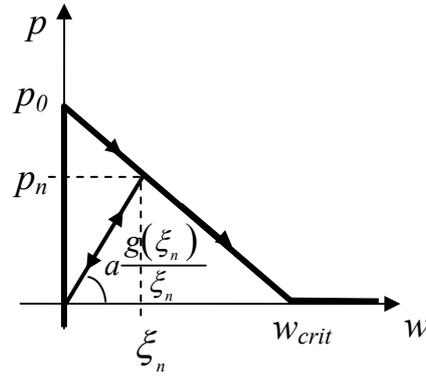


Figura 1– Legame tra tensione e discontinuità di spostamento.

$$U^n(u, \xi_n) = \frac{1}{2} \int_I E \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_I b u dx + \sum_{z \in S_u} a(z) \tilde{G}(w(z), \xi_n(z))$$

dove S_u è il luogo delle possibili sedi di frattura lungo la barra, è possibile mostrare come la posizione di prima attivazione della cricca sia ottenibile minimizzando il funzionale rispetto alla posizione della frattura per $\xi = 0$ e come tutte le altre equazioni che governano il problema siano ottenibili come condizioni di stazionarietà del medesimo funzionale.

Lo spostamento u può essere eliminato dal funzionale imponendo il rispetto dell'equilibrio, ottenendo così un nuovo funzionale \mathcal{U} che dipende solo dallo spostamento impresso η , da w e dalla posizione della cricca \bar{x} :

$$\mathcal{U}(\eta, w, \bar{x}) = \frac{E(\eta - w)^2}{2L} + \frac{b(2w\bar{x} - L(\eta + w))}{2} - \frac{b^2 L^3}{24E} + \left[1 + \left(\bar{x} - \frac{L}{2} \right)^2 \right] G(w)$$

Imponendo la stazionarietà rispetto a w e \bar{x} ed imponendo $w = 0$, è possibile ricavare il valore $\eta_0 = 0.099 L$ dello spostamento impresso che porta alla prima attivazione della cricca e la posizione $\bar{x} = 0.49 L$ della frattura. La figura 2a mostra l'andamento del funzionale $\mathcal{U}(\eta_0, w, \bar{x})$ in corrispondenza della prima attivazione della cricca. E' evidente l'avvallamento in corrispondenza del valore $\bar{x} = 0.49 L$ che minimizza il funzionale. Dal punto di vista meccanico, la posizione di prima attivazione della cricca corrisponde al punto \bar{x} in cui per la prima volta lo sforzo raggiunge il valore limite $p_0(\bar{x}) = a(x)g(0)$, come mostrato in figura 2b.

Al crescere dello spostamento impresso, è sempre energeticamente più conveniente aprire la fessura coesiva già formatasi piuttosto che deformare ulteriormente la barra. Questo si evince chiaramente dal grafico in figura 3a, dove è mostrato l'andamento del funzionale $\mathcal{U}(\eta, w, \bar{x})$ in soluzione per valori crescenti di η . Nella figura 3a, la curva rossa rappresenta l'energia della barra integra, mentre la curva blu, l'energia della barra fessurata.

E' opportuno notare che per valori di $\eta > \eta_0$, la soluzione si può ottenere dalle condizioni di stazionarietà di \mathcal{U} solo per \bar{x} fissato (punto bianco in figura 3b). Il minimo assoluto di \mathcal{U} prevederebbe la presenza di una cricca in una posizione diversa da $\bar{x} = 0.49 L$ e non rappresenta quindi una soluzione ammissibile del problema.

Ringraziamenti – Questo lavoro è stato svolto nell'ambito del progetto MIUR- PRIN03 su *Interfacial damage failure in structural systems: applications to civil engineering and emerging research fields*.

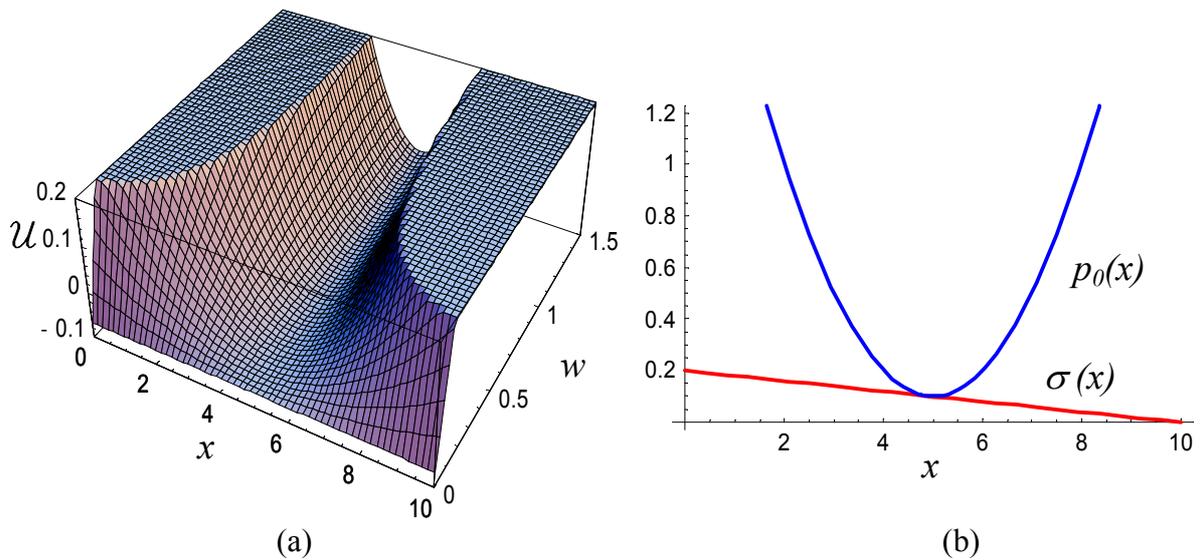


Figura 2 – (a) energia per $\eta = \eta_0$; (b) posizione della frattura.

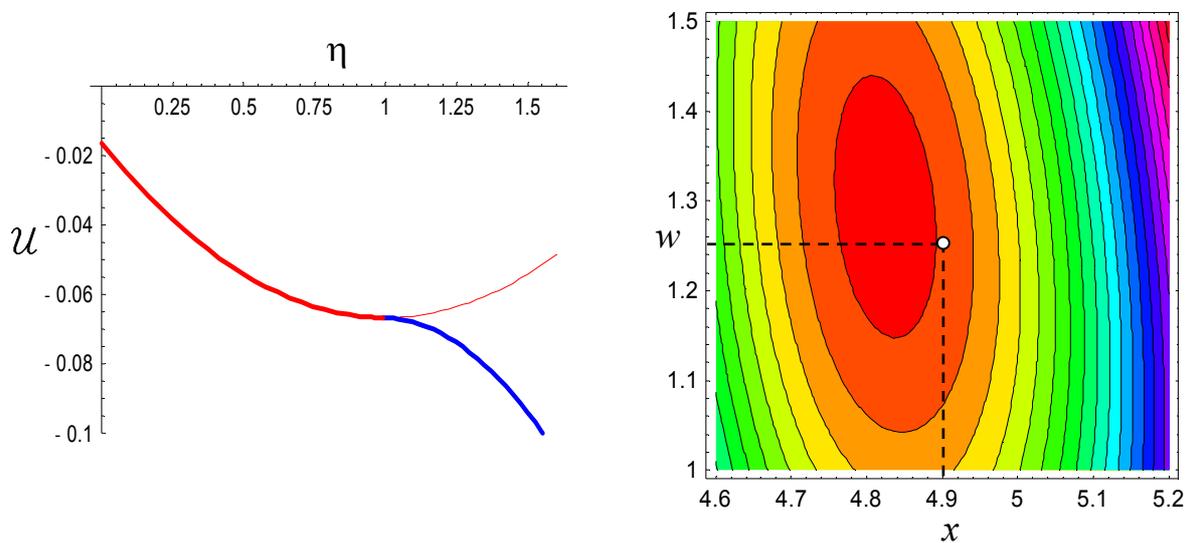


Figura 3 – (a) energia in funzione dello spostamento imposto; (b) curve di livello dell'energia per $\eta = 0.14L$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. Francfort, J.J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 46, pp. 1319–1342, (1998).
- [2] A. Braides, G. Dal Maso, A. Garroni, Variational formulation of softening phenomena in fracture mechanics: The one-dimensional case, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 146, pp. 23–58, (1999).
- [3] G. Maier, C. Comi, Energy properties of solutions to quasi-brittle fracture mechanics problems with piecewise linear cohesive crack models, in: *Continuous damage and fracture*, A. Benallal ed., Elsevier (2000).
- [4] G. Del Piero, L. Truskinovsky, Macro- and micro-cracking in one-dimensional elasticity, *Internat. J. Solids Structures*, vol. 38, pp. 1135–1148, (2001).
- [5] M. Negri, A finite element approximation of the Griffith's model in fracture mechanics, *Numer. Math.*, vol. 95, pp. 653–687, (2003).
- [6] M. Angelillo, E. Babilio, A. Fortunato, A computational approach to fracture of brittle solids based on energy minimization, *Preprint Università di Salerno*, (2004).