

Compared Accuracy Evaluation of Estimators of Traffic Long-Range Dependence

S. Bregni, *Senior Member, IEEE*

I. INTRODUCCIÓN

EL TRAFICO de paquetes exhibe propiedades de correlación temporal, como la auto similitud y memoria larga (dependencia de largo alcance) [1][2]. Contrario a la suposición clásica de Poisson, estas propiedades enfatizan en la correlación del tiempo a largo alcance entre los paquetes. Los modelos de movimiento de ruido fraccional y browniano fraccional son usualmente usados para describir el comportamiento de las series de tráfico de internet, que incluyen pero no son limitadas al recuento de datos transmitidos a través del tiempo, el tiempo entre llegadas de conexiones sucesivas TCP o de paquetes IP, etc.

En un proceso aleatorio auto-similar, una porción dilatada de una realización tiene la misma caracterización estadística que el todo. "Dilatación" es aplicada en ambos ejes de amplitud y tiempo del trayecto de la muestra, de acuerdo con un parámetro de escala H llamado parámetro de Hurst. Por una parte, la dependencia de largo alcance (LDR) es una propiedad de larga memoria observada en escalas de tiempo grande, usualmente asociado a una disminución asintótica de la ley potencial de la densidad espectral de potencia (PSD) $\sim f^{-\gamma}$ ($\gamma \geq 0$) o equivalentemente a la función de auto covarianza. Bajo algunas hipótesis, la integral de un proceso LRD es auto similar con H relacionado con γ (p.ej., movimiento browniano fraccional, integral del ruido fraccional Gaussiano).

Una estimación precisa de los parámetros estadísticos que caracteriza la auto-similitud y LRD es un tema importante que ha sido estudiado en varios trabajos, con el objetivo de el mejor modelamiento de tráfico, por ejemplo, con el propósito de una simulación de la red. La mayor atención ha sido dedicada al diseño de algoritmos para la estimación de los parámetros H

y de la secuencia de datos supuesto con LRD.

Entre la diversas técnicas propuestas en la literatura para este objetivo, el enfoque directo consiste en el análisis de datos en el dominio de la frecuencia: un *periodograma* sencillo log-log que produce una estimación directa de γ y de H de su pendiente [3][4]. Sin embargo, cabe señalar que esta técnica no es muy adecuada para analizar procesos con el espectro de la ley de potencia $\sim f^{-\gamma}$ ($\gamma > 0$), que agrupa la mayor energía para $f \rightarrow 0$, siendo muestras estándar del periodograma espaciadas uniformemente en la frecuencia.

Para este tipo de proceso aleatorio, el análisis en el dominio del tiempo es el mas adecuado. Por ejemplo, el método grafico básico *Varianza-Tiempo (VT)* [2][3][5][6] estudia la varianza de las series de tiempo agregado, hechas de muestras calculadas por el promedio no solapamiento de las ventanas de datos. Mediante la observación del decaimiento de la varianza, como función del ancho de la ventanas, γ y H pueden ser estimadas.

Se han propuesto muchas otras cantidades en el dominio del tiempo para estimar los parámetro de secuencia de datos LRD: mas o menos sofisticado, se basan en algún tipo de dato en el dominio del tiempo durante un intervalo variable de observación. estas cantidades, log-log vs el intervalo de observación, presentan una pendiente regular en γ y H si se calcula en los datos LRD. Entre los diversos métodos de dominio del tiempo, la *estadística de rango ajustado re-escalado* (estadística R/S) [3][7][8] y la *Varianza Allan (AVAR)* [9]–[12] son algunos de los mas interesantes.

Otro método en el dominio del tiempo se propuso para la rápida identificación de la ley de potencia de ruido con exponente entero: *lag-1 auto correlación* [13], que consiste en la evaluación de los datos de auto correlación $R(k)$ en $\text{lag } k = 1$. Este método puede ser adaptado, con cierta precaución, para la estimación aproximada de parámetro fraccional γ .

Mas allá de la dicotomía de los dominios de tiempo y la frecuencia, un gran avance se produjo cuando las técnicas basadas en el análisis wavelet fueron introducidas para la estimación fraccional del ruido [1][14]–[17]. Debido a su sensibilidad en los fenómenos de escala en un rango de escala, wavelets son muy adecuados para detectar la auto-similitud u otros comportamientos de escala mas complejos. Entre las técnicas basadas en wavelet, el llamado Daubechies wavelet *Logscale Diagram (LD)* es de suma importancia [16].

En un contexto diferente, la *Varianza de Allan Modificada (MAVAR)* es una cantidad conocida en el dominio del tiempo, inicialmente propuesta (1981) para la caracterización de la estabilidad de frecuencias en los osciladores de precisión [12][18]–[21], intencionalmente diseñadas para discriminar los tipos de ruido con el espectro de la ley de potencia. Los estándares de Telecomunicaciones (ANSI, ETSI, ITU-T) especifican algunos requisitos de sincronización de la red en términos de Varianza de Tiempo (TVAR), estrechamente relaciona-

dos con MAVAR [22]. Recientemente, MAVAR también fue propuesta como una herramienta de análisis de tráfico LRD, señalando su precisión superior en la estimación de H y γ [23]–[26].

La *Varianza Hadamard Modificada* (MHVAR) también se propuso [24], generalizando el concepto de MAVAR a las diferencias de orden superior de los datos análogos a la clásica Varianza Hadamard (HVAR) [11][27]–[29]. Tanto MAVAR como MHVAR fueron demostradas para ofrecer significativamente una mejor precisión en la estimación de H y γ que el ampliamente usado LD [24].

En este paper, mediante la evaluación de miles de series de datos LRD pseudo-aleatorios, comparamos la precisión de estimación de H y γ alcanzado por los métodos anteriores: es decir, VT plot, el diagrama R/S, auto correlación lag-1, LD, MAVAR y MHVAR. En la literatura, casi no hay estudios comparativos sobre la precisión actual alcanzado por varios estimadores LRD, con una notable excepción [3]. Por lo tanto, nuestros resultados serán valiosos para los investigadores que participan en el análisis de tráfico o, mas generalmente, en la estimación de los datos de la ley de potencia.

II. AUTO-SIMILITUD Y DEPENDENCIA DE LARGO ALCANCE

Un proceso aleatorio $X(t)$ (digamos, paquetes de llegada acumulativos en el intervalo $[0, t]$), se dice que es *auto-similar*, con el parámetro de escalado de la auto-similitud o del parámetro Hurst $H > 0$, $H \in \mathfrak{R}$, si

$$X(t) =_d a^{-H} X(at) \quad (1)$$

para todo $a > 0$, donde $=_d$ denota la igualdad de todas las distribuciones de orden finito [1]. En otros términos, la descripción estadística de $X(t)$ no cambia *escalando* simultáneamente su amplitud por a^{-H} y el eje de tiempo por a .

La clase de los procesos de auto-similitud (SS) usualmente se limita a los procesos de *auto-similitud con incrementos estacionarios* (SSSI), que son "integral" de un proceso estacionario. Por ejemplo, considerando δ -proceso de incremento de $X(t)$, definido como $Y_\delta(t) = X(t) - X(t - \delta)$ (digamos, los paquetes de llegadas en los últimos δ unidades de tiempo). Por un procesos SSSI, $X(t)$, $Y_\delta(t)$ es estacionaria y $0 < H < 1$ [1].

Dependencia de Largo Alcance (LRD) de un proceso es definido por una disminución asintótica de la ley de potencia de su auto covarianza y funciones PSD [1]. Sea $Y(t)$ un proceso estocástico estacionario de segundo orden. $Y(t)$ presenta LRD si, equivalentemente, su auto covarianza y los dos lados PSD siguen asintóticamente

$$R_Y(\delta) \sim c_1 |\delta|^{\gamma-1} \quad \text{for } \delta \rightarrow +\infty, 0 < \gamma < 1 \quad (2)$$

$$S_Y(f) \sim c_2 |f|^{-\gamma} \quad \text{for } f \rightarrow 0, 0 < \gamma < 1 \quad (3).$$

En general, un proceso aleatorio con una ley de potencia no entera PSD es también conocido como ruido (no necesariamente Gaussiana) fraccional. Un proceso SSSI $X(t)$ con $1/2 < H < 1$ tiene incrementos LRD $Y(t)$, con

$$\gamma = 2H - 1 \quad (4).$$

Estrictamente hablando, H caracteriza a los procesos SS, pero a menudo se usa también para etiquetar los incrementos LRD de los procesos SSSI. En este trabajo, seguimos esta cos-

tumbre común: la expresión "El parámetro Hurst de los procesos LRD" (caracterizado por γ) en realidad denota el parámetro $H = (\gamma+1)/2$ de su integral SSSI del proceso principal.

III. MÉTODOS PARA LA ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS H Y γ

Para facilitar la comprensión, esta sección recuerda las definiciones básicas de los métodos de comparación, viz. VT plot, la estadística R/S, $R(1)$, LD, MAVAR y MHVAR. La secuencia de datos de entrada $\{x_i\}$ se supone LRD y con una longitud N . Para todos los detalles y un tratado preciso, se remite al lector a la bibliografía citada.

A. Varianza-Tiempo Plot

El método VT plot [2][5][6] estudia la varianza $\sigma^2(m)$ de la secuencia agregada que se obtiene dividiendo la serie LRD $\{x_i\}$ en bloques no solapados de longitud m y un promedio de ellos, p.ej.

$$X_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} x_i \quad (5)$$

para $k = 1, 2, \dots, N/m$. La varianza de la secuencia agregada se puede estimar como la varianza de muestra

$$\sigma^2(m) = \frac{1}{N/m} \sum_{k=1}^{N/m} [X_k^{(m)}]^2 - \left[\frac{1}{N/m} \sum_{k=1}^{N/m} X_k^{(m)} \right]^2 \quad (6).$$

Para grandes N/m y m , esta varianza obedece a la ley de potencia

$$\sigma^2(m) \sim m^{\gamma-1} \sigma_x^2 \quad (7).$$

Así, por regresión lineal de un log-log plot of $\sigma^2(m)$ versus m , γ y H pueden ser estimados.

B. Estadística de Rango Ajustado Re-escalado (R/S)

La estadística R/S es uno de los principales métodos en el dominio del tiempo para la estimación LRD [3][7][8]. Basada en la suma parcial $Y(n) = \sum_{i=1}^n x_i$ y en la varianza de la muestra $S^2(n) = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2 - Y^2(n)/n^2$, la estadística R/S es definida como

$$\frac{R(n)}{S(n)} = \frac{1}{S(n)} \left\{ \max_{0 \leq l \leq n} \left[Y(l) - \frac{l}{n} Y(n) \right] - \min_{0 \leq l \leq n} \left[Y(l) - \frac{l}{n} Y(n) \right] \right\} \quad (8).$$

Asumiendo LRD $\{x_i\}$ (3), para $n \rightarrow \infty$ su valor esperado es

$$E \left[\frac{R(n)}{S(n)} \right] \sim C_H n^H \quad (9)$$

donde C_H es una constante positiva.

En practica, para estimar H usando la estadística R/S, la secuencia de entrada $\{x_i\}$ es dividida en K bloques. Entonces, por cada lag n , R/S se calcula hasta K puntos de partida, tomadas uniformemente en diferente bloques. Por regresión lineal en log-log plot de $R(n)/S(n)$ versus n , H y γ pueden ser estimados.

C. Auto correlación Lag-1

Recientemente, el uso de la auto correlación lag-1 fue propuesta para identificación de la ley de potencia de ruido [13].

La secuencia de auto correlación $\{x_i\}$ at lag k es estimada como

$$R(k) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i - \bar{x})(x_{i+k} - \bar{x})}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (10)$$

donde $\bar{x} = (1/N) \sum_{i=1}^N x_i$ es el valor medio. La auto correlación lag-1 es un simple valor $R(1)$ dado anteriormente. Basados en este valor, los parámetros γ y H pueden ser estimados (2).

D. Diagrama de Daubechies Wavelet Logscale

El análisis wavelet se ha vuelto ampliamente usado para detectar auto-similitud y dependencia de largo alcance (LRD) [1][14]-[17]. Entre estas técnicas, LD de segundo orden es de suma importancia [16]: analiza los datos en un intervalo de escalas j (octavas), que va desde 1 (detalle mas fino) a una escala mas larga dada por la longitud de una serie finita. Asumiendo datos LRD $\{x_i\}$ (3), este método se basa en la observación del comportamiento asintótico de la ley de potencia de los detalles de las varianzas wavelet a través de las escalas

$$E[d_x(j,k)^2] \sim C 2^{j\gamma} \quad (11)$$

donde $d_x(j,k)$ son los coeficientes de Daubechies wavelets $\psi_{j,k}(t)$ en la descomposición de la señal $x(t)$. Estas varianzas pueden ser eficientemente estimadas como

$$\mu_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} d_x(j,k)^2 \quad (12)$$

donde $n_j = 2^j N$ es el numero de coeficientes disponibles en la octava j . El log-log plot de μ_j versus j se conoce como LD de segundo orden. Por regresión lineal, γ y H pueden ser estimados (11).

E. Varianzas Modificadas de Allan y Hadamard

La Varianza Modificada de Allan (MAVAR) [12] y la Varianza Modificada de Hadamard (MHVAR) [24] fueron demostrados que cuentan con excelente precisión en la estimación de H y γ [24].

Dado un conjunto finito de N muestras $\{x_k\}$ espaciadas por τ_0 durante un intervalo de medición $T=(N-1)\tau_0$, MAVAR puede ser estimado como

$$\text{Mod } \sigma_y^2(n\tau_0) = \frac{\sum_{j=1}^{N-3n+1} \left[\sum_{i=j}^{j+1} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i) \right]^2}{2n^4 \tau_0^2 (N-3n+1)} \quad (13)$$

con $n=1, 2, \dots, \lfloor N/3 \rfloor$. Existe un algoritmo recursivo para el calculo rápido [12], lo que reduce la complejidad de la evaluación para todos valores $\lfloor N/3 \rfloor$ de n a $O(N^2)$ en lugar de $O(N^3)$.

Por otro lado, MHVAR de orden M se puede estimar como

$$\text{Mod } \sigma_{H,M}^2(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N-(M+1)n+1} \left[\sum_{j=i}^{i+n-1} \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} (-1)^k x_{j+kn} \right]^2}{M! n^4 \tau_0^2 [N - (M+1)n + 1]} \quad (14)$$

con $n = 1, 2, \dots, \lfloor N/(M+1) \rfloor$. MHVAR- M es basado en la M^{th}

diferencia de los datos de entrada. MAVAR coincide con MHVAR para $M=2$. MHVAR y MAVAR difieren desde HVAR y AVAR sin modificar, respectivamente, en el promedio adicional interno sobre n muestras adyacentes: para $n = 1$ ($\tau = \tau_0$), ellos coinciden. HVAR y MHVAR de orden $M=3$ se han considerado principalmente en la literatura [11][27]—[29].

Asumiendo datos LRD $\{x_i\}$ (3), ambas MAVAR y MHVAR- M se encuentran para obedecer la ley de potencia sencilla para $n \rightarrow \infty$, $n\tau_0 = \tau$, pero en practica para $n > 4$)

$$\text{Mod } \sigma_{H,M}^2(\tau) \sim A_\mu \tau^\mu, \quad \mu = -3 + \gamma \quad (15).$$

Por regresión lineal en log-log plot, H y γ pueden ser estimados.

IV. EVALUACIÓN DE LA PRECISIÓN ESTIMADA

La precisión de los métodos VT plot, la estadística R/S, $R(1)$, LD-3, MAVAR y MHVAR-3 fue evaluada y comparada por extensas simulaciones. Estimadores como se indican arriba y especificados en la referencias citadas fueron programados, Todos los resultados LD fueron ejecutados con secuencias de comando estándares [30], usando Daubechies wavelet con tres momentos de fuga (LD-3).

Los métodos de estimación fueron aplicados a una serie de datos pseudo aleatorios LRD $\{x_k\}$ de longitud N , generada con un solo lado de la PSD $S_x(f) = hf^{-\gamma}$ ($0 \leq \gamma \leq 1$) para asignar valores de $H = (1+\gamma)/2$. El algoritmo de generación es por Paxson [31]: un vector de muestras aleatorias, tiene una amplitud igual a la raíz cuadrada de una variable distribuida de manera exponencial con media $S_x(f_k)$ y fase uniformemente distribuida en $[0, 2\pi]$, es la transformada inversa de Fourier para producir secuencia en el dominio del tiempo $\{x_k\}$.

Primero, 100 secuencias pseudo aleatoria independiente $\{x_k\}$ de longitud $N = 131072$, con media $m_x = 0$ y varianza $\sigma_x^2 = 1$, fueron generados para cada uno de los 11 valores $\{H_i\} = \{0.50, 0.55, \dots, 1.00\}$, correspondiente a $\{\gamma\} = \{0, 0.1, \dots, 1.0\}$. En la serie 1100 tiempo resultante, aplicamos todos los métodos, obteniendo seis conjuntos de estimaciones $\{\hat{H}_{i,j}\}$, para $i = 0, 1, \dots, 10$ y $j = 1, 2, \dots, 100$. Entonces, evaluamos la precisión de estas estimaciones, calculando la estimación absoluta de error $\Delta_{i,j} = \hat{H}_{i,j} - H_i$.

Repetimos el mismo test para otro conjunto de 1100 secuencias de longitud $N = 1024$, para comprar los métodos en secuencias cortas, donde los resultados están deteriorados por la falta de confianza.

En la Fig. 1 se compara la estimación de error $\{\Delta_{i,j}\}$ obtenidos por los seis métodos en las secuencias de $N = 131072$ muestras. Para cada valor de H_i , la media m_{Δ_i} (punto), la desviación estándar $\pm \sigma_{\Delta_i}$ (barra gruesa) y excursión máximo-mínimo (barra fina), fuera de 100 errores de estimación, se grafican. La excursión máx-min es estadísticamente muy significativa, ya que se pueden incluir

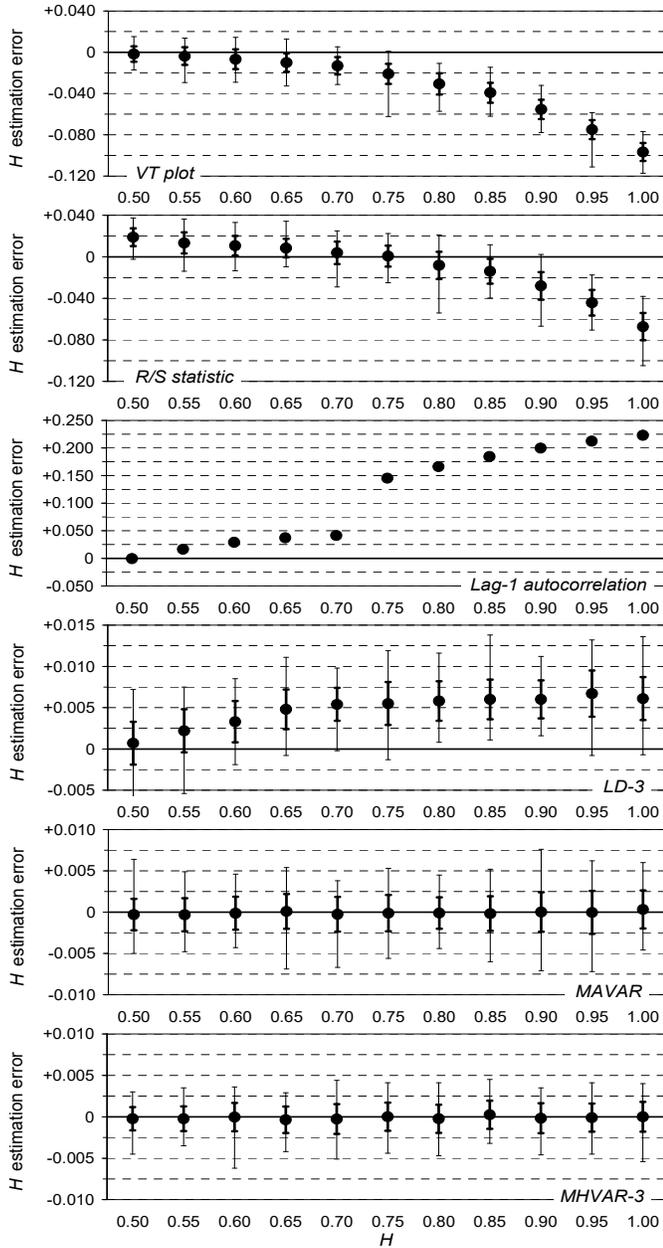


Figura 1: Estimación absoluta del error de H alcanzado por seis métodos ($N=131072$, media, desviación estándar y excursión min-máx de 100 muestras)

valores atípicos, pero se puede representar de todos modos, para mostrar un vistazo la propagación de la estimación de error máximo. Del mismo modo, en la Fig. 2 se compara la estimación de errores $\{\Delta_{i,j}\}$ obtenidos en las secuencias cortas de $N=1024$ muestras. Al examinar las comparaciones de estos gráficos, debe considerarse que algunos tienen diferentes escalas en el eje Y , debido a la gran diferencia de precisión alcanza por los métodos.

Finalmente, en la Fig. 3 la media de los 11 valores medios m_{Δ_i} (puntos) y de las 11 desviaciones estándar σ_{Δ_i} (barras) para $N=1024$ y $N=131072$, obtenidos de los métodos VT plot, estadística R/S, LD-3, MAVAR y MHVAR-3 ($R(1)$ los

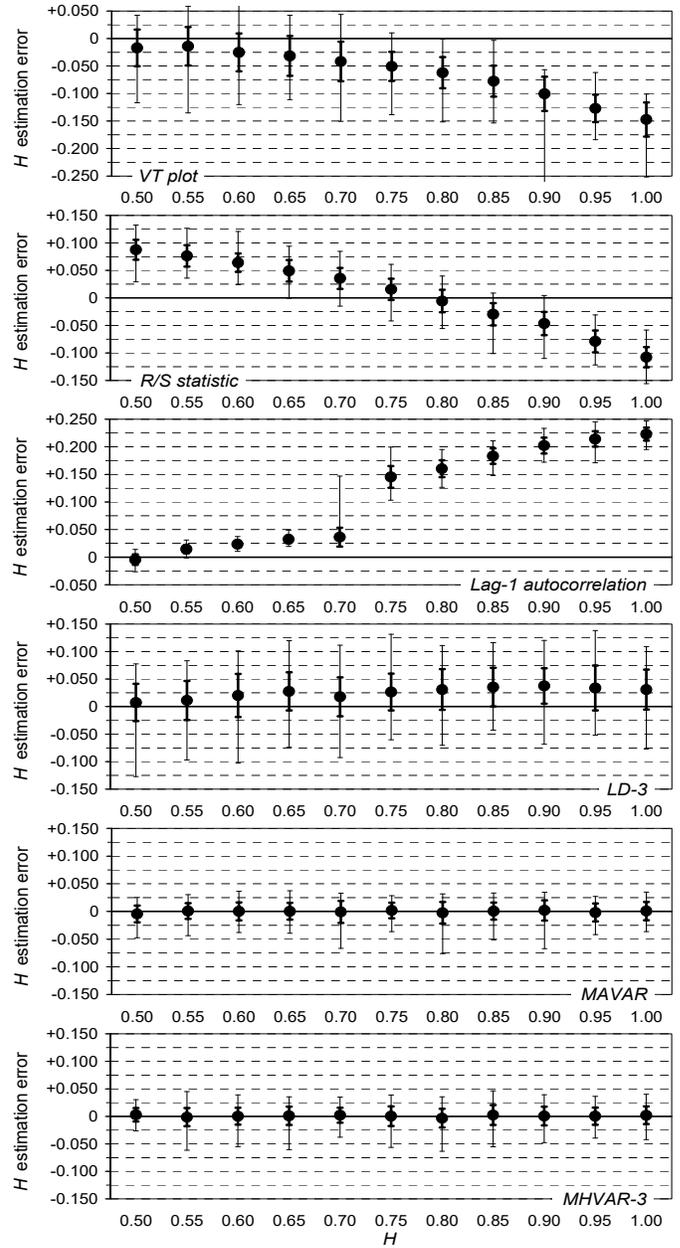


Figura 2: Estimación absoluta del error de H alcanzado por seis métodos ($N=1024$, media, desviación estándar y excursión min-máx de 100 muestras).

resultados están muy por fuera de la escala). Estos resultados se promedian sobre 1100 muestras (p.ej., 100 secuencias pseudo aleatorias para cada uno de los 11 valores de H_i).

Primero, por inspección de las Figs. 1, 2 y 3 y como ya se ha señalado en [24], nos damos cuenta de que MAVAR y MHVAR-3 (graficadas con la mis escala que LD-3) proporcionan por mucho, las estimaciones más precisas. En particular, MAVAR y MHVAR-3 no son sesgadas y logran una mejor confianza (p.ej., más pequeño σ_{Δ_i}) que en otro método. La precisión de LD-3 se aproxima al MAVAR y MHVAR-3, pero solo para grandes secuencias. Las estimaciones por VT plot y la estadística R/S son significativamente sesgadas y son mayormente afectadas por una mayor incertidumbre.

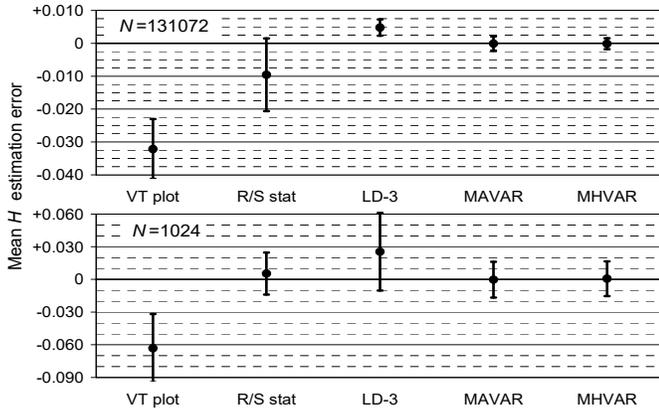


Figura 3: Promedio de la media $E[m_{\Delta_i}]$ y desviación estándar $E[\sigma_{\Delta_i}]$ ($i = 0, \dots, 10$) de los errores estimados de H alcanzados por cinco métodos ($R(1)$ fuera de escala, resultados promedio de 100 secuencias pseudo aleatorias para cada uno de los 11 valores H_i).

Estimaciones por auto correlación lag-1, finalmente, sufre un sesgo muy grande (hasta 0.25 en la estimación de los valores H cerca de 1) y son por mucho el menos preciso. Algunos comentarios mas específicos pueden ser hechos.

- *Largas secuencias* ($N=131072$). La media de σ_{Δ_i} de MHVAR-3 estimado es de -22% que la de MAVAR, que ha su vez es -14% que la de LD-3. Esta ganancia de confianza es significativa, ya que se calcula sobre 1100 estimaciones independientes. La media de σ_{Δ_i} de VT plot y la estadística R/S estimadas es cuatro veces mas ancha que la de LD-3, MAVAR y MHVAR-3.
- *Cortas secuencias* ($N=1024$). La media de σ_{Δ_i} de MHVAR-3 estimado es -3% que la de MAVAR, que es -54% que la de LD-3. Este ultimo método, en secuencias cortas, da estimaciones afectadas por la alta incertidumbre.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo, por la evaluación de miles de serie de datos LRD generados con valores asignados a H , comparamos la la precisión estimada de H alcanzando por alguno de los métodos LRD mas utilizados para el análisis de trafico: viz. VT plot, estadística R/S, auto correlación lag-1, LD, MAVAR y MHVAR-3. Estas figuras de comparación de precisión pueden ser valiosos para los investigadores involucrados en la medición de trafico y en la caracterización o, mas generalmente, en la estimación de ruido fraccional.

Extensas simulaciones mostraron que MAVAR y MHVAR-3 lograron la mejor confianza y no adquieren un sesgo en la estimación de H . En largas secuencias ($N = 131072$), la desviación estándar media de 1100 MHVAR-3 estimada resulta 22% mas pequeña que la de MAVAR, que a su vez fue 14% mas pequeña que la de LD-3. En cortas secuencias ($N = 1024$), MHVAR-3 y MAVAR alcanzan confianza similar, mucho mejor que LD-3 (desviación media 54% mas pequeña). Este rendimiento superior es aun mas significativo, si consideramos la estimación sesgada de LD-3.

Estimaciones por VT plot y estadística R/S resulta afectada por un significativo sesgo y por una mayor incertidumbre: para $N = 131072$, la desviación estándar de ambos resultados es cuatros veces mas ancho que el de LD-3, MAVAR y MHVAR-3. Estimaciones por auto correlación lag-1, final-

mente, exhibió un gran sesgo (hasta 0.25 en la estimación de valores de H cercanos a 1) y fueron por mucho, el menos preciso.

Las figuras de precisión empíricas presentados en este trabajo se extienden aun mas en los resultados previstos en [24]. MAVAR y MHVAR-3 son los estimadores mas precisos de los parámetros LRD, H and ζ en termino de confianza y de sesgo, entre todos los métodos considerados en este estudio. Su complejidad computacional es comparable a los otros métodos, en particular LD, desde estimadores (13)(14) se pueden calcular de forma recursiva. [12].

AGRADECIMIENTOS

El autor desea reconocer la importante contribución de su antiguo alumno L. Jmoda en todas las simulaciones numéricas.

REFERENCIAS

- [1] K. Park, W. Willinger, "Self-Similar Network Traffic: An Overview"; P. Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu, D. Veitch, "Wavelets for the Analysis, Estimation, and Synthesis of Scaling Data"; in *Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation*, K. Park, W. Willinger, Eds. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2000, pp. 1-88.
- [2] V. Paxson, S. Floyd, "Wide-Area Traffic: the Failure of Poisson Modeling", *IEEE/ACM Trans. Networking*, vol. 3, no. 6, pp. 226-244, 1995.
- [3] M. S. Taqqu, V. Teverovsky, W. Willinger, "Estimators for Long-Range Dependence: an Empirical Study", *Fractals*, vol. 3, no. 4, pp. 785-798, 1995.
- [4] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, "Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing. 2nd Edition", Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- [5] J. Beran, "Statistics for Long-Memory Processes". New York, NY, USA: Chapman and Hall, 1994.
- [6] M. Krnz, "On the Limitations of the Variance-Time Test for Inference of Long-Range Dependence", *Proc. IEEE INFOCOM 2001*, Anchorage, AK, USA, 2001.
- [7] H. E. Hurst, "Long-Term Storage Capacity of Reservoirs", *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, vol. 116, 770-808, 1951.
- [8] H. E. Hurst, R. Black, Y. M. Sinaika, "Long-Term Storage in Reservoirs: An Experimental Study". London, UK: Constable, 1965.
- [9] D. W. Allan, "Statistics of Atomic Frequency Standards", *Proc. IEEE*, vol. 54, no. 2, pp. 221-230, July 1966.
- [10] J. A. Barnes, A. R. Chi, L. S. Cutler, D. J. Healey, D. B. Leeson, T. E. McGunigal, J. A. Mullen Jr., W. L. Smith, R. L. Sydner, R. F. C. Vessot, G. M. R. Winkler, "Characterization of Frequency Stability", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 20, no. 2, pp. 105-120, May 1971.
- [11] J. Rutman, "Characterization of Phase and Frequency Instabilities in Precision Frequency Sources: Fifteen Years of Progress", *Proc. IEEE*, vol. 66, no. 9, pp. 1048-1075, Sept. 1978.
- [12] S. Bregni, "Chapter 5 - Characterization and Modelling of Clocks", in *Synchronization of Digital Telecommunications Networks*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2002, pp. 203-281.
- [13] W.J. Riley, C.A. Greenhall, "Power Law Noise Identification Using The Lag 1 Autocorrelation", *Proc. 18th European Freq. and Time Forum*, Guildford, UK., April 2004.
- [14] G. W. Wornell, A. V. Oppenheim, "Estimation of Fractal Signals from Noisy Measurements Using Wavelets", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 3, pp. 611-623, March 1992.
- [15] P. Abry, P. Gonçalves, P. Flandrin, "Wavelets, Spectrum Analysis and 1/f Processes", in *Lecture Notes in Statistics: Wavelets and Statistics*, vol 103, A. Antoniadis, G. Oppenheim, Eds. Springer, 1995, pp. 15-29.
- [16] P. Abry, D. Veitch, "Wavelet Analysis of Long-Range Dependent Traffic", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, no.1, pp. 2-15, Jan. 1998.
- [17] D. Veitch, P. Abry, "A Wavelet-Based Joint Estimator of the Parameters of Long-Range Dependence", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, no.3, pp. 878-897, Apr. 1999.
- [18] D. W. Allan, J. A. Barnes, "A Modified Allan Variance with Increased Oscillator Characterization Ability", *Proc. 35th Annual Freq. Contr. Symp.*, 1981.

- [19] P. Lesage, T. Ayi, "Characterization of Frequency Stability: Analysis of the Modified Allan Variance and Properties of Its Estimate", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 33, no. 4, pp. 332-336, Dec. 1984.
- [20] L. G. Bernier, "Theoretical Analysis of the Modified Allan Variance", *Proc. 41st Annual Freq. Contr. Symp.*, 1987.
- [21] D. B. Sullivan, D. W. Allan, D. A. Howe, F. L. Walls, Eds., "*Characterization of Clocks and Oscillators*", NIST Tech. Note 1337, March 1990.
- [22] ITU-T Recs. G.810 "Definitions and Terminology for Synchronisation Networks", G.811 "Timing Characteristics of Primary Reference Clocks", G.812 "Timing Requirements of Slave Clocks Suitable for Use as Node Clocks in Synchronization Networks", G.813 "Timing Characteristics of SDH Equipment Slave Clocks (SEC)", Geneva, 1996-2003.
- [23] S. Bregni, L. Primerano, "The Modified Allan Variance as Time-Domain Analysis Tool for Estimating the Hurst Parameter of Long-Range Dependent Traffic", *Proc. IEEE GLOBECOM 2004*, Dallas, USA, 2004.
- [24] S. Bregni, L. Jmoda, "Accurate Estimation of the Hurst Parameter of Long-Range Dependent Traffic Using Modified Allan and Hadamard Variances", *IEEE Trans. on Commun.*, vol.56, no.11, pp.1900-1906, 2008.
- [25] S. Bregni, W. Erangoli, "Fractional Noise in Experimental Measurements of IP Traffic in a Metropolitan Area Network", *Proc. IEEE GLOBECOM 2005*, St. Louis, MO, USA, 2005.
- [26] S. Bregni, R. Cioffi, M. Decina, "An Empirical Study on Time-Correlation of GSM Telephone Traffic", *IEEE Trans. on Wireless Commun.*, Vol. 7, No. 9, pp. 3428-3435, Sept. 2008.
- [27] R. A. Baugh, "Frequency Modulation Analysis with the Hadamard Variance", *Proc. 25th Annual Freq. Contr. Symp.*, pp. 222-225, Apr. 1971.
- [28] W. J. Riley, "The Hadamard Variance", Hamilton Technical Services, 1999. Available: <http://www.wriley.com>.
- [29] F. Vernotte, G. Zalamansky, M. Mc Hugh, E. Lantz, "Estimation of the Upper Limit on the Level of an Undetected Noise - Application to the Study of Millisecond Pulsars", *Proc. 1996 IEEE Int. Freq. Contr. Symp.*, pp. 875-879, June 1996.
- [30] D. Veitch. "Code for The Estimation of Scaling Exponents". Available: http://www.cubinlab.ee.mu.oz.au/~darryl/seconddorder_code.html.
- [31] V. Paxson, "Fast Approximation of Self-Similar Network Traffic", *ACM/SIGCOMM Comp. Commun. Review*, vol. 27, no. 7, pp.5-18, 1997.